UNE PUBLICATION DESTINÉE AUX ÉCOLES DE L'ENSEIGNEMENT MOYEN
DE LA RÉPUBLIQUE DU SENEGAL APPROUVÉE PAR LE MINISTRÉRE DE L'ÉDUCATION

Mathématiques

Raisonnement quantitatif

Niveaux 6e et 5e

UNE PUBLICATION DESTINÉE AUX ÉCOLES DE L'ENSEIGNEMENT MOYEN
DE LA RÉPUBLIQUE DU SENEGAL APPROUVÉE PAR LE MINISTRÉRE DE L'ÉDUCATION

Mathématiques

Raisonnement quantitatif

Niveaux 6^{e} et 5^{e}

RÉPUBLIQUE DU SENEGAL
MINISTRÈRE DE L'ÉDUCATION

Mathématiques
Raisonnement quantitatif

Niveaux 6^{è} et 5^{è}

<u>Éditeur en Chef</u>
Johnny L. Houston, Ph.D.

<u>Assistant Editeur-En-Chef</u>
Chérif Seck, Ph.D.

<u>Auteur Contributeur</u>
Chérif Seck, Ph.D **Mave T. Houston, Ph.D**

<u>Auteur collaborateur</u>
Mangary Ka **Mr. Samba Dabo** **Mr. Bachir Diakham**

<u>Consultants</u>
Samba Fall **Pape M. Sow** **Abdou Maty Sene, Ph.D**

<u>Traducteur</u>
Chérif Seck, Ph.D.

<u>Graphiste/Illustrateur</u>
Randolph Harris

Programme des Manuels Scolaires et Autres Outils d'Apprentissage (TLMP)
ECSU – Sénégal TLMP
Elizabeth City State University (ECSU)
Elizabeth City, Caroline du Nord 27909 (USA)

USAID
FROM THE AMERICAN PEOPLE

Un Projet pour le Gouvernement du Sénégal – Financé par l'Initiative pour l'Éducation en Afrique AEI de l'USAID
Programme des Manuels Scolaires et Autres Outils d'Apprentissage (TLMP)

Table de matières

Thème: I
Les nombres rationnels

Thème I : Les nombres rationnels

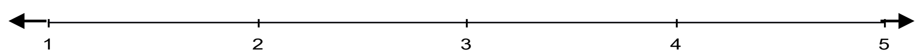
Leçon 1 : Les propriétés des nombres rationnels

Le sais-tu ?

Un **ensemble** une collection d'objets bien définis. Un objet qui appartient à cet ensemble est appelé élément ou membre de la collection   Exemple: A = {x, y, z}; z est un élément de l'ensemble A. En mathématique, nous utilisons fréquemment les ensembles importants de nombres suivants.

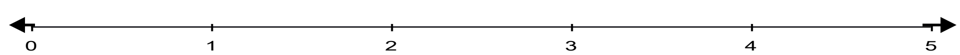
L'ensemble des nombres naturels (or les nombres comptables) est : {1, 2, 3,…}

On peut placer sur un axe gradué les nombres naturels situés à égale distance allant de 1 au nombre suivant.



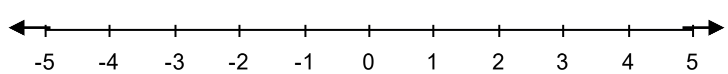
L'ensemble des nombres entiers est le même qu'un ensemble de nombres naturels sauf qu'il inclut le zéro. Par conséquent ses chiffres sont {0, 1, 2, 3,…}

On peut placer sur un axe gradué les nombres entiers situés à égale distance allant de 0 au nombre suivant.



Un ensemble d'entiers relatifs comprend les nombres entiers et leurs négatifs. Ainsi, ses nombres sont : {…, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,…}

Sur un axe gradué, les entiers relatifs augmentent dans les deux sens.



Un ensemble de nombres rationnels comprend les entiers relatifs et les fractions qu'on peut obtenir en divisant un entier relatif par un autre tant qu'on ne divise pas par zéro (le mot rationnel réfère au **ratio** des entiers relatifs). En d'autres termes, les nombres rationnels peuvent être exprimés sous la forme suivante :

$\frac{x}{y}$ où x et y sont des entiers relatifs et are $y \neq 0$

(Rappelons que le symbole $\neq$ signifie "n'est pas égal", "est différent de.")

Les propriétés des nombres rationnels

Le système des nombres rationnels.

Cette leçon explore les propriétés des nombres rationnels. Nombre de propriétés nous seront familières dans la mesure où les entiers présentent les mêmes propriétés. Cependant, nous découvrirons de nouvelles et importantes propriétés de nombres rationnels qui n'ont pas d'équivalent dans les nombres relatifs. Cette leçon offre aussi des techniques d'estimation, d'addition. Elle donne également des exemples d'application des nombres rationnels à utiliser pour la résolution de problèmes pratiques impliquant un raisonnement quantitatif.

Les propriétés de l'addition et de la soustraction

Négative ou inverse additif

Considérons que $\frac{a}{b}$ est un nombre rationnel. Son **négatif,** ou **inverse additif,** est $-\frac{a}{b}$, est le nombre rationnel $\frac{-a}{b}$. Exemple L'inverse additif de $\frac{5}{7}$ est $\frac{-5}{7}$

Les propriétés de l'addition de nombres rationnels

Considérons que $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ et $\frac{e}{f}$ sont des nombres rationnels. Les propriétés suivantes sont observées.

«Clôture? » $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ La somme de deux nombres rationnels est un nombre rationnel.

La commutativité $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$

L'associativité $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$

Zéro est une identité additive $\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b}$

L'existence d'inverses additifs $\frac{a}{b} + \left(-\frac{a}{b}\right) = 0$, où $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}$

Les propriétés des nombres rationnels

Formules pour la soustraction des nombres rationnels

Considérons que $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont des nombres rationnels. Puis $\frac{a}{b}$ - $\frac{c}{d}$ $=$ $\frac{a}{b} + \left(-\frac{c}{d}\right)$ $=$ $\frac{ad-bc}{bd}$.

Propriétés de la multiplication des nombres rationnels

Considérons que $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ et $\frac{e}{f}$ sont des nombres rationnels. **Les propriétés suivantes sont observées.**

(La clôture) ? $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ Le produit de deux nombres rationnels est un nombre rationnel.

.

La commutativité $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$

L'associativité $\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right)$

Propriété distributive de la multiplication au-delà de l'addition et de la soustraction

$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} + \frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}$ and $\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d}-\frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}$

Multiplication par Zéro $0 \cdot \frac{a}{b} = 0$

Un est une idée multiplicative $1 \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$

Existence d'inverse multiplicative Si $\frac{a}{b} \neq 0$, et il n'y a qu'un nombre rationnel, à savoir $\frac{b}{a}$, pour lequel $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a} = 1$.

Propriété de relation d'ordre des nombres rationnels

Considérons que $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ et $\frac{e}{f}$ sont des nombres rationnels.

Les propriétés des nombres rationnels

Transitivité

$$\text{Si } \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ et } \frac{c}{d} < \frac{e}{f}\text{, donc } \frac{a}{b} < \frac{e}{f}.$$

L'addition

$$\text{Si } \frac{a}{b} < \frac{c}{d}\text{, puis } \frac{a}{b} + \frac{e}{f} < \frac{c}{d} + \frac{e}{f}.$$

La multiplication

$$\text{Si } \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ et } \frac{e}{f} > 0,\text{ donc } \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} < \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}.$$

$$\text{Si } \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ et } \frac{e}{f} < 0,\text{ donc } \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} > \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}.$$

Propriété de la trichotomie: Seule de ces fractions est vraie.

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}\ , \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}\ \textbf{, ou} \quad \frac{a}{b} > \frac{c}{d}\ .$$

La densité des nombres rationnels

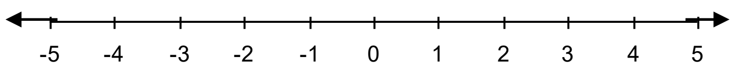
Considérons que $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont deux nombres rationnels, avec $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Ensuite un nombre rationnel $\frac{e}{f}$ se trouve entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$; on obtient, $\frac{a}{b} < \frac{e}{f} < \frac{c}{d}$.

Les propriétés des nombres rationnels

Activités 1

1. Place les points ci-dessus sur l'axe gradué

a) $\frac{3}{4}$ **b)** $-\frac{7}{8}$ **c)** $\frac{12}{18}$ **d)** -2 **e)** $2\frac{3}{8}$



2. Établis la liste de l'inverse additive des fractions dans l'exercice 1, pour…

a) **b)** **c)** **d)** **e)**

3. Établis la liste des inverses multiplicatives des fractions dans l'exercice 1, pour

a) **b)** **c)** **d)** **e)**

4. Range les fractions de l'exercice 1 du plus petit au plus grand.

5. Utilise les fractions **b) et c)** de l'exercice 1 pour illustrer la propriété de l'addition. Simplifie la fraction finale.

6. Utilise les fractions **a) et c)** de l'exercice 1 pour illustrer la propriété de la multiplication. Simplifie la fraction finale.

7. Utilise les fractions **b) et c)** de l'exercice 1 pour illustrer la propriété de l'addition. Simplifie la fraction finale.

8. Utilise les fractions **a) et c)** de l'exercice 1 pour illustrer la propriété de la commutativité de l'addition. Simplifie la fraction finale.

9. Utilise les fractions **a), b) et c)** de l'exercice 1 pour illustrer la propriété de l'addition. Simplifie la fraction finale.

10. Utilise les fractions **a) b) et c)** de l'exercice 1 pour illustrer la propriété de la distributivité de l'addition. Simplifie la fraction finale. Donne les détails de chaque étape et donne le résultat simplifié de chaque coté du signe égal.

Les propriétés des nombres rationnels

Activités 2

1. Discute et illustre les différences entre les nombres naturels, les nombres entiers, les et les nombres rationnels (fractions).

2. Discute et illustre la densité des nombres rationnels ; employez les nombres réels et donne plusieurs exemples

3. Discute pourquoi tu penses que l'identité additive, zéro (0), et l'identité multiplicative, de (1) est importante ou n'est pas importante. Donne plusieurs exemples pour illustrer les utilisations de zéro (0) et un (1).

4. Discute et illustre la propriété de la transitivité des nombres rationnels ; donne plusieurs exemples.

5. Discute et illustre l’ordre des nombres rationnels quand la même fraction est ajoutée ou multiplier à deux fractions, dont l’une est plus grande ou petite que les autres.

Thème I : Les nombres rationnels

Leçon 2 : Les nombres rationnels et les opérations arithmétiques

Le sais-tu ?

Opérations sur les nombres rationnels

1. **Les concepts de base des fractions et des nombres rationnels**

(a) Une fraction est une pair ordonnée de nombres entiers *a* and *b*, $b \neq 0$, sous la forme $\frac{a}{b}$ ou a/b.

(b) Deux fractions qui expriment la même quantité, ou correspondent au même point sur un axe gradué, sont appelées fractions équivalentes. En particulier $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$ pour tous les nombres entiers n, $n \neq 0$ et $\frac{a}{b} = \frac{a \div d}{b \div d}$ si *d* divise *a* et *b* et $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si, et seulement si $ad = bc$.

(c) Une fraction est équivalente à une autre fraction dans sa forme la plus simple. Deux ou plusieurs fractions peuvent toujours être remplacées par des fractions équivalentes avec un dénominateur commun.

(d) Un nombre rationnel est un nombre représenté par une fraction commune $\frac{a}{b}$. Le même nombre rationnel peut aussi être représenté par toute fraction équivalente à $\frac{a}{b}$.

(e) Si deux nombres rationnels sont représentées par $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, avec $b > 0$ et $d > 0$, puis $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ si et seulement si, $ad < bc$.

Les nombres rationnels et les opérations arithmétiques

2. L'arithmétique des nombres rationnels

(a) La somme de deux nombres rationnels représentés par des fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{b}$ avec un dénominateur commun est définie par $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$. On en déduit que $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$. La soustraction est définie par l'approche d'absence de cumulateur: $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ si et seulement si, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$. La formule de la soustraction $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$ découle de la définition de la soustraction.

(b) La multiplication est définie par $\frac{a}{b} \bullet \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

(c) La définition est définie par l'approche d'un facteur manquant: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ si et seulement si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \bullet \frac{e}{f}$.

(d) Un nombre rationnel non nul, $\frac{a}{b}$ a un multiplicateur inverse unique a unique, $\frac{b}{a}$, qui multiplié par $\frac{a}{b}$ est égal à 1. C'est, $\frac{a}{b} \bullet \frac{b}{a} = 1$.

Deux nombres relatifs sont dits inverses lorsque leur produit est égal à 1.

3. Le système des nombres rationnels

(a) Les nombres rationnels sont fermés dans l'addition. L'addition est commutative, associative, et zéro est l'identité additive.

(b) Chaque nombre rationnel, $\frac{a}{b}$, a un unique négatif, $-\frac{a}{b}$, écrit sous la forme $\frac{-a}{b}$, qui est l'additif inverse de $\frac{a}{b}$. La soustraction équivaut à ajouter le négatif, aussi $\frac{a}{b} - \frac{b}{d} = \frac{a}{b} + (-\frac{b}{d})$.

Les nombres rationnels et les opérations arithmétiques

(c) La multiplication est fermée?, commutative, associative, l'un des termes est le multiplicateur, et la multiplication distribue au-delà de l'addition et de la soustraction.

(d) Chaque nombre rationnel non nul $\frac{a}{b}$ a un multiplicateur unique inverse représenté par son inverse $\frac{b}{a}$. La division équivaut à multiplier par l'inverse du multiplicateur du diviseur, aussi $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \bullet \frac{d}{c}$.

(e) Les nombres rationnels ont une densité parce qu'il y a un nombre rationnel entre deux nombres rationnels.

(f) Compétences – estimations, calcul mental, le papier et le crayon, la calculatrice électronique – sont autant utiles que nécessaires pour travailler non seulement sur les nombres rationnels mais aussi sur for tout autre système de nombre.

Une fraction $\frac{a}{b}$ est de forme simple s'il n'y a pas un nombre c qui divise les deux termes a et b à l'exception de 1. $\frac{5}{9}$ est de forme simple. $\frac{6}{9}$ n'est pas de forme simple parce que les deux termes de la fraction peuvent être divisés par un même nombre.
$\frac{6}{9} = \frac{2\cdot 3}{3\cdot 3} = \frac{2}{3}$ (est de forme simple pour dire simplifié).

Exemple. Soit $3\frac{1}{5} + 5\ \frac{3}{4}$

$$
\begin{aligned}
&= \left(3+\frac{1}{5}\right)+\left(5+\frac{3}{4}\right)\\
&= \left(\frac{5}{5}\cdot\frac{3}{1}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{4}{4}\cdot\frac{5}{1}+\frac{3}{4}\right)\\
&= \left(\frac{15}{5}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{20}{1}+\frac{3}{4}\right)\\
&= \left(\frac{16}{5}+\frac{23}{4}\right)\\
&= \frac{\cancel{20}}{20}\cdot\frac{16}{\cancel{5}}+\frac{\cancel{20}}{20}\cdot\frac{23}{\cancel{4}}\\
&= \frac{64}{20}+\frac{115}{20}\\
&= \frac{179}{20}
\end{aligned}
$$

Rational Numbers and Arithmetic Operations

Addition et soustraction des fractions

Si deux fractions ont un dénominateur commun, nous pouvons les additionner ou les soustraire. Pour ce faire, il suffit d'additionner ou de soustraire les numérateurs et de conserver le dénominateur. Par exemple :

$$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{1+2}{5}=\frac{3}{5} \qquad \text{or} \qquad \frac{7}{9}-\frac{2}{9}=\frac{7-2}{9}=\frac{5}{9}$$

À défaut, il faut d'abord réduire les fractions au même dénominateur avant de les additionner ou de les soustraire. Par exemple, on peut additionner $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ en les réduisant au même dénominateur 6. Ce qui revient à $\frac{3}{6}$ et $\frac{2}{6}$, respectivement :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{3+2}{6}=\frac{5}{6}$$

Multiplication des fractions

Pour multiplier deux fractions, on multiplie séparément les numérateurs et les dénominateurs entre eux. Par exemple :

$$\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{1\times 2}{3\times 5}=\frac{2}{15}$$

Il est parfois possible de simplifier des fractions par la suppression des chiffres qui se répètent au numérateur et au dénominateur. Par exemple, le chiffre 3 se retrouve à la fois le numérateur et le dénominateur. Il peut être barré des deux cotés.

$$\frac{3}{4}\times\frac{5}{3}=\frac{\cancel{3}\times 5}{4\times\cancel{3}}=\frac{5}{4}$$

Réciproques et division

Deux nombres sont dits réciproques quand leur produit est ágal à 1. For exemple:

$$2 \text{ et } \frac{1}{2} \text{ sont réciproques parce que } 2\times\frac{1}{2}=1$$

$$\frac{4}{3} \text{ et } \frac{3}{4} \text{ sont réciproques parce que } \frac{4}{3}\times\frac{3}{4}=1$$

On trouve la réciproque d'une fraction y par inversion (en interchangeant numérateur et dénominateur). Pour un nombre entier tel que 2 ayant comme dénominateur 1, d'où $\frac{2}{1}$ sa réciproque sera simplement $\frac{1}{2}$.

Les nombres rationnels et les opérations arithmétiques

Activités 1

***Soient les fractions a)** $\frac{3}{8}$ **b)** $5\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{35}{4}$ **d)** $\frac{-4}{27}$ **e)** $2\frac{5}{12}$ **f)** $\frac{123}{369}$ **g)** $\frac{1}{3}$

1. Laquelle de ces fractions dans (*) est dans une forme simple ?

2. Donne au moins une fraction équivalente à chacune de ces fractions sous la forme $\frac{a}{b}$ dans (*).

3. Dans (*) additionne les fractions **a), b),** et **c)**.

4. Dans (*) multiplie les fractions **a), b),** et **c)**.

5. Dans (*) additionne les fractions **b)** et **e)**, puis multiplie leur somme par **d)**.

6. Dans (*) divise **f)** par **g)** mentalement.

7. Dans (*) divise **d) + c)** par **d)**.

8. Dans (*) calcule la somme et la différence entre **b)** et **e)**.

9. Dans (*) calcule le produit et puis divise par **c)** et **e)**.

10 Soustrais **b)** de **c)** et leur différence de **e)**

Rational Numbers and Arithmetic Operations

Activités 2

Quelle est la réponse la plus appropriée pour chacun de ces problèmes ?

1. $2\frac{1}{48}+3\frac{1}{99}+6\frac{13}{25}$ est approximative.

a) 11 **b)** $11\frac{1}{2}$ **c)** 12 **d)** $12\frac{1}{4}$ **e)** aucune d'elles.

2. $8\cdot\left(2\frac{1}{2}+3\frac{7}{15}\right)$ est approximative.

a) 40 **b)** 44 **c)** 48 **d)** 56 **e)** aucune d'elles.

3. $11\frac{9}{10}\div\frac{21}{40}$ est approximative

a) 20 **b)** 23 **c)** 26 **d)** 30 **e)** aucune d'elles.

4. Décris comment les calculs ci-après peuvent être effectués mentalement.

a) $\frac{19}{111}\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{-4}{6}\right)$ **b)** $\frac{5}{6}\cdot\frac{36}{15}$

5. Décris comment les calculs ci-après peuvent être effectués mentalement.

a) $\frac{5}{8}\cdot\left(\frac{9}{5}-\frac{1}{5}\right)$ **b)** $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}$

Thème I : Les nombres rationnels

Leçon 3 : Compter avec les Facteurs, les arrangements et les Combinaisons

Le **sais-tu?**

Les facteurs

Les produits tels que $4 \times 3 \times 2 \times 1$ sont tellement fréquents en calcul qu'ils ont fini par avoir un nom spécial. Chaque fois qu'un nombre entier **n** est multiplié par tous les entiers précédents positifs, le résultat est appelé ***n* facteur de**, noté sous la forme ***n* !** (le point d'exclamation se lit "**facteur de**"). Exemple :

$1! = 1$
$2! = 2 \times 1 = 2$
$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$
$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$
$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

Généralement,

$n\,! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \cdots \times 2 \times 1$

Note que **n !** croît rapidement avec "n". Par exemple $20\,! \approx 2.4 \times 10^{18}$, $40\,! \approx 8.2 \times 10^{47}$, and $60! \approx 8.3 \times 10^{81}$. En effet, les facteurs deviennent tellement importants qu'aucune calculatrice ne peut les traiter comme dans l'exemple ci-dessus $n = 69$ (si la limite de la calculatrice est 0^{100}).

Notons aussi que, définition, $0\,! = 1$.

Exemple : Effectue chacune des opérations suivantes sans utiliser la touche facteur de ta calculatrice.

a. $\dfrac{6!}{4!}$

Solution:

a. On peut effectuer toute l'opération, mais il serait de la simplifier par la suppression de certains termes dans le numérateur et le dénominateur.

$$\frac{6!}{4!} = \frac{6 \times 5 \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1}{\cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4!}$$

$$= 6 \times 5 = 30$$

Compter avec les Facteurs, les arrangements et les Combinaisons

EXE MPLE 3 *Election de dirigeants*
Une ville a 12 candidats pour trios postes. Celui aura plus de voix remplira les fonctions de maire, le second sera l'adjoint au maire et le troisième le trésorier. Quels seront les résultats possibles pour les trois postes de leader ?

Arrangements (Permutations)

Définition : Soit p un entier naturel non nul tel que p<n. On appelle arrangement de p éléments de E une p-liste d'éléments de E deux à deux distincts.En mathématique on parle de permutation chaque fois toutes les sélections proviennent d'un seul groupe d'objets. Aucun de ses objets ne peut être sélectionné plus d'une fois et la manière de les agencer est aussi importante. Par exemple ABCD sera différent de DCBA). Le nombre total de arrangements possibles avec un groupe de N objets est n! où n! = n * (n-1) *…*2*1 lu "n factorielle de.", Convention : 0 ! = 1.

EXAMPLE 2 *Emploi du temps*
Le directeur d'un collège veut établir l'emploi du temps de six différentes matières : Algèbre, Anglais, Histoire, Espagnol, Science et Gym en six périodes. Combien d'emploi de temps est-il possible peut-il établir ?

Formule de l'arrangement

Supposons que tu entraines une équipe de 10 coureurs parmi lesquels tu dois choisir une équipe de 4 relayeurs par groupe. De combien de possibilités disposes-tu ?
Cette fois-ci, tu as dix nageurs parmi lesquels tu dois choisir celui qui fera le premier tronçon du relai. Ce choix fait, tu dispose de neuf nageurs parmi lesquels tu choisiras celui qui couvrira le second tronçon. Il en sera de même pour les autres nageurs.
Le nombre total de relai possible est :

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

Chacun des 5040 relayeurs représente une différente permutation parce que chaque nageur est sélectionné à partir du même groupe de dix nageurs. Aucun nageur ne peut nager plus d'une fois, et l'ordre des nageurs dans le relai est important. Cependant, dans ce cas de figure, les relais se servent seulement de quatre des dix nageurs. Par conséquent, le nombre de relais possibles faits à partir des dix nageurs, en choisissant quatre à la fois, est 5040.
On peut trouver une règle pour formuler l'arrangement en écrivant le produit $10 \times 9 \times 8 \times 7$ de manière légèrement différente.

$$10 \times \mathbf{9} \times \mathbf{8} \times \mathbf{7} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times \cancel{6!}}{\cancel{6!}} = \frac{10!}{(10-4)!}$$

Notons que, dans la formule de droite,

- Le nombre 10 dans le numérateur est le nombre de nageurs parmi lesquels l'entraineur peut choisir les quatre relayeurs, et
- Le nombre 10 – 4 = 6 dans le dénominateur est le nombre de joueurs qui ne nageront pas.

Compter avec les Facteurs, les arrangements et les Combinaisons

Les arrangements ont une notation qui leur est propre. On lit $10^{P}4$ comme le nombre de arrangements des dix objets, 4 sont sélectionnés à la fois. En utilisant cette notation, on a:

$$_{10}P_4 = \frac{10!}{(10-4)!} = 5040$$

Pour généraliser, nous avons la formule qu'il faut pour calculer le nombre de arrangements.
Si nous faisons une sélection r à partir d'un groupe de n objets, le nombre de arrangements possibles est :

$$_{n}\mathrm{P}_{r} = \frac{n!}{(n-r)!} = \underbrace{n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)}_{rfactorshere}$$

où $n^{P}r$, est lu comme "le nombre de arrangements de n objets en prenant r à la fois".
C'est, il y a 60 arrangements possibles quand on choisit trios personnes dans un groupe de cinq. Toutefois, parce que si l'ordre compte beaucoup pour la permutation, il ne l'est pas pour les comités, le nombre de arrangements est un au-delà des comptes du nombre actuel de différents comités. Plus spécifiquement, chaque comité de trois personnes peut être écrit de la sorte $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ ordres différents. Par exemple, un comité constitué de zeke, Yolanda et Wendy a six différentes arrangements :

ZYW ZWY YZW YWZ WZY WYZ

Parce que chaque comité de trois personnes est pris en compte 3! = 6 fois par la formule de la permutation, celle-ci nous donne six fois le nombre actuel de comités. Ce veut dire que nous devons diviser le nombre de arrangements par 3 ! pour trouver le nombre de comités.

$$\frac{_5P_3}{3!} = \frac{60}{3!} = \frac{60}{3\times2\times1} = 10$$

C'est le même résultat que nous obtenons en établissant la liste de trois personnes du comité. La part de la permutation de l'équation est $n^{P}r$, où n=5 et r = 3. Nous divisons après ce terme par r! = 3! pour corriger l'excès. Donc, la formule générale pour la combinaison est la formule de la permutation divisée par r !

Les combinaisons

Les combinaisons se produisent toutes les fois que tous les choix viennent d'un seul groupe d'articles, aucun objet ne peut être choisi plus d'une fois, et l'ordre d'agencement n'est pas pris en compte (par exemple, ABCD est considéré comme étant le même que DCBA). En faisant arrangement r à partir d'un groupe d'objets n, le nombre de combinaisons possibles est :

$$_nC_r = \frac{_nP_r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!\times\ r!}$$

où $_nC_r$ est lu "le nombre de combinaison de *n* objets pris en *r* à la fois."

Compter avec les Facteurs, les arrangements et les Combinaisons

Définition : E étant un ensemble à n éléments, on appelle combinaison de p éléments de E toute collection non ordonnée de p éléments distincts de E, i.e. toute partie de E à p éléments

On note C_n^p le nombre de combinaison de p éléments parmi n. On a :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p(p-1)\ldots 1}$$

EXEMPLE 5 Supposons que tu choisis trois (3) saveurs différentes de crème glacée de douze saveurs dans un magasin. Combien de combinaisons de saveurs sont-ils possibles?

SOLUTION: Il s'agit de trouver le nombre de combinaisons of n = 12 de fleurs sélectionnées $r = 3$ à la fois. A partir de la formule de la combinaison, le nombre de fleurs de la combinaison est :

$${}_{12}C_3 = \frac{12!}{(12-3)! \times 3!} = \frac{12!}{9! \times 3!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9!}{9! \times 3!} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = \frac{1320}{6} = 220$$

Il y a 220 différentes combinaisons possibles de trois fleurs à partir des 12 fleurs.

Compter avec les Facteurs, les arrangements et les Combinaisons

Activités

1. Quel type de nombre est 6!

2. Qu'est-ce que $\frac{25!}{22!}$

3. Qu'est-ce que $\frac{200!}{199!}$

4. Écris toutes les permutations de $\{w, x, y, z\}$

Soit s = {1, 2, 3, 4, 5}

5. Cite les trois permutations de *s*.

6. Cite les trios combinaisons of *s*.

7. Trouve la valeur de:

a) P(6, 3) **b)** P(8, 5)

8. Trouve la valeur de:

a) C(8, 4) **b)** C(12, 6)

9. Quelle relation, s'il y en a une, existe entre P(4, 3) and C(4, 3)?
(Conseil: calcule chacune d'elles avant)

10. Dans les opérations suivantes, lesquelles sont les mêmes?

a) 0! **b)** 1! **c)** $\frac{6!}{6!}$ **d)** P(6, 6) **e)** C(6, 6)

Compter avec les Facteurs, les arrangements et les Combinaisons

Activités 2

1. Un principal de collège doit programmer six classes , Algèbre, anglais, histoire, Espagnols, la Science, et salle de gymnastique différents dans un délai de six périodes différentes. Combien d'emploi de temps possibles de différentes classes pourra-t-il établir ?

2. Une ville a 12 candidats pour trois postes de dirigeant. Le candidat qui aura plus de voix sera le maire, le deuxième l'adjoint au maire, et le troisième, le trésorier. Combien de solutions sont possibles ?

3. Suppose qu'il y a huit coureurs dans une compétition. Le gagnant reçoit une médaille d'or, le second reçoit une médaille d'argent, et le troisième une médaille de bronze. Combien y a-t-il de manière différentes pour l'attribution de ces médailles, si toutes les possibles se produire ?

4. Soit $s = \{a, b, c, d, e, f\}$

Combien existe-t-il de sous-ensembles de *s* contenant

a) aucun élément ?
b) un seul élément (1) ?
c) deux éléments (2) ?
d) trois (3) éléments ?
e) quatre(4) éléments ?
f) cinq (5) éléments ?
g) six (6) éléments
h) au moins (4) éléments

5. Cite et discute deux différentes entre permutations et combinaisons.

Thème I : Les nombres rationnels

Leçon 4 : Ordre et addition

Le sais-tu ?

L'ordre est utilisé en mathématique pour ranger des éléments. Il est employé de différentes manières. On peut ce servir de l'ordre pour résoudre certains problèmes d'addition. Cette leçon présentera la notation employée pour représenter des ordres et des sommes de termes d'un ordre. Quand les éléments d'un ensemble infini peuvent être énumérés, on dit qu'ils sont comptables. Nous parlerons dans cette leçon à la fois des ensembles comptables et non comptables.

Un ordre est une structure mathématique employée pour représenter une liste ordonnée. Un ordre est une liste d'articles qui peuvent être rangés dans une correspondance 1-1 avec un sous-ensemble des nombres entiers positifs (habituellement soit l'ensemble {0, 1, 2...} ou l'ensemble {1, 2, 3....}) à l'ensemble S. Nous employons la notation $\mathbf{a_n}$ pour indiquer le n^e terme de la séquence. $\mathbf{a_n}$ est appelé terme de l'ordre.

Nous employons la notation $\{\mathbf{a_n}\}$ pour décrire la séquence toute entière. Notons que $\mathbf{a_n}$ représente un terme individuelle de l'ordre $\{\mathbf{a_n}\}$. En outre, il est à remarquer que la notation $\{\mathbf{a_n}\}$ pour un ordre est en conflit avec la notation pour un ensemble. Cependant, le contexte dans lequel nous employons cette notation aidera à différencier les ensembles de l'ordre quand on parle. Nous décrivons des ordres en énumérant les termes de l'ordre par l'ordre croissant des indices.

EXEMPLE 1 Sois la s = $\{a_n\}$, où

$$a_n = 1/n.$$

La liste des termes de cet ordre commence par a_1, à savoir

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots,$$

commençant par:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots,$$

EXEMPLE 2 Les ordres de type:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n,$$

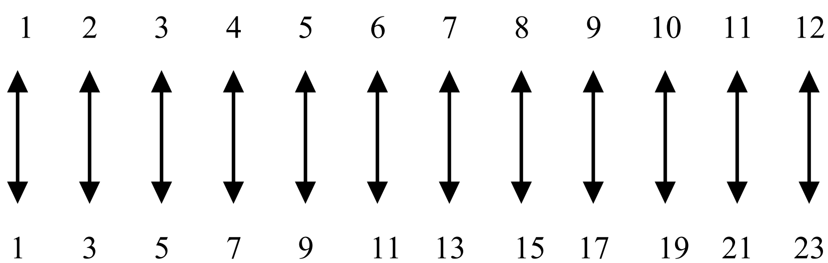
sont souvent utilisés en mathématique. Ces ordres finis sont encore appelés **chaine**. Elle est représentée par $a_1\, a_2 \ldots a_n$. La **longueur** de la chaine **S** est l'ensemble des termes de cette chaine. La chaine vide est celle sans termes. Elle est sans longueur car elle est égale à zéro.

Ordre et addition

EXEMPLE 3 La chaine *abcd* est une chaine longue de quatre termes.

Spécial ordres de nombres entiers

Un problème commun en mathématiques quantitatives est de trouver une formule ou une règle générale pour construire les termes d'un ordre. Quoique les premiers termes d'un ordre ne déterminent pas l'ordre entier, elles peuvent habituellement nous aider à identifier the n^e terme de l'ordre ou à trouver tous les termes de l'ordre.



Une correspondance un à un entre N et l'ensemble des entiers positifs impairs.

Un ensemble infini est comptable si et seulement si il est possible d'énumérer les éléments de l'ensemble dans une correspondance linéaire de l'ensemble de nombres naturels à un ensemble **S** peut être exprimé en termes d'ordre a1, a2....... Par exemple, l'ensemble de nombres entiers impairs peut être énuméré dans un ordre a1, a2......., où = 2n - 1 (voire le graphique /figure sur cette même page).

Cardinalité. En théorie des ensembles, la **cardinalité** représente la taille d'un ensemble. Pour les ensembles finis, elle vaut le nombre d'éléments de cet ensemble. Il est possible d'étendre le concept de cardinalité à tous les ensembles, finis et infinis, avec la définition suivante.

Définition Les ensembles *A* et *B* ont **la même cardinalité** si et seulement si, la correspondance un à un de A à B peut être établie.
Nous allons maintenant classifier les ensembles infinis en deux groupes, ceux avec la même cardinalité comme l'ensemble des nombres naturels et ceux avec une cardinalité différente.
Définition Un ensemble fini qui a la même cardinalité que l'ensemble de nombres naturels est dit ***comptable***. Un ensemble qui n'est pas comptable est dit ***incomptable***.

Voici des exemples d'ensembles comptables et incomptables.

Ordre et addition

EXEMPLE Nous avons prouvé que l'ensemble de nombres entiers positifs impairs est un ensemble comptable. L'ensemble de toutes les fractions entre 0 et 1 peut s'avérer incomptable.

L'addition

Nous introduisons ici le symbole de l'addition $\sum$ (La lettre grecque signifie sigma).

Soit l'ordre $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots$ puis les sommes

$$a_1 + a_2 \ldots + a_n \qquad \text{et} \qquad a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n$$

qui seront respectivement représentés par :

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \qquad \text{et} \qquad \sum_{j=m}^{n} a_j$$

La lettre **j** est appelée index factice ou variable factice.

Exemple Quelle est la valeur de $\sum_{j=1}^{5} j^2$

Solution Nous avons $\sum_{j=1}^{5} j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$

$= 1 + 4 + 9 + 16 + 25 \qquad = 55$

Quelques propriétés spéciales des séquences et de l'addition

- **Séquence arithmétique** Une séquence dans laquelle deux termes consécutifs ont la même différence commune (d) est appelée une **séquence arithmétique**.
  Exemple Dans la séquence {1, 4, 7, 10, 13, …} chaque pair de termes a la même différence,
  $d = 3$.
- **Séquence géométrique** Une séquence dans laquelle tout pair de termes consécutifs on tune commune ratio (r) est appelée **séquence géométrique**.
  Exemple Dans la séquence {3, 6, 12, 24, 48, …} note que:
  $$\frac{6}{3} = 2, \quad \frac{12}{6} = 2, \quad \frac{24}{12} = 2, \quad \frac{48}{24} = 2$$
- **Séquences récursives** Quand une séquence est définie par une condition initiale et une relation répétitive, nous appelons ce type de séquence une séquence récursive.

Example a) $a_1 = 1$

b) $a_n = a_{n-1} + 3$, for $n \geq 2$

Cette séquence est : {1, 4, 7, 10, 13, 16, …}

- **Double addition Double** Certains additions impliquent deux ou plus de symboles d'addition.
  Exemple
  $$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} ij = \sum_{i=1}^{4}(i + 2i + 3i) = \sum_{i=1}^{4} 6i = 2 + 12 + 18 + 24 = 60$$

Ordre et addition

Activités 1

***Écris les cinq premiers termes de l'ordre dont les termes principaux sont exprimés par a_n .**

1. **a)** $a_n = 5\text{-}2n$ **b)** $a_n = n^2 + n$

2. **a)** $a_n = 4 \cdot 3^n$ **b)** $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

*** Trouve la règle pour le terme général a_n de l'ordre dont les 5 premiers termes sont :**

3. **a)** 1, 5, 9, 13, 17, … **b)** 72, 36, 18, 9, $\frac{9}{2}$, …

4. **a)** 0, 3, 8, 15, 24, … **b)** -1, -2, -3, -4, -5, …

5. Détermine lequel des ordres suivants est un ordre arithmétique; si c'est un ordre arithmétique, qu'est-ce qu'alors d ?

a) 3, 8, 13, 18, 23, … **b)** 2, 3, 5, 8, 12, …
c) 10, 9, 8, 7, 6, … **d)** 7, 1, -5, -11, -17, …

6. Détermine lequel des ordres suivants est un ordre géométrique. Si c'est le cas, qu'est-ce qu'alors *r* ?

a) 3, 2, $\frac{4}{3}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{16}{27}$, … **b)** 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, …
c) 2, -2, 2, -2, 2, … **d)** 1, 4, 9, 16, 25, …

7. Définis ces ordre de manière récursive.

a) 3, 6, 12 , 24, 48, … **b)** 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, …
c) 2, -2, 2, -2, 2, … **d)** 1, 4, 9, 16, 25, …

8. Quelles sont les valeurs des sommes suivantes ?

a) $\sum_{k=1}^{5}(k+1)$ **b)** $\sum_{j=0}^{4}(-2)^j$

9. Trouve la valeur de chacune des sommes ci-après.

a) $\sum_{j=0}^{8}(1+(-1)^j)$ **b)** $\sum_{j=0}^{8}(3^j - 2^j)$

10. Compose des ordres arithmétiques et géométriques, puis trouve la somme des cinq premiers (5) termes.

Ordres and addition

Activités 2

1. L’auditorium d’une école a 12 sièges dans la première rangée, 13 sièges dans la deuxième rangée, 14 sièges dans la troisième rangée, et ainsi de suite. S'il y a 30 rangées dans la salle, combien de sièges y a-t-il dans la dernière rangée ?

2. Supposons qu’un ordre a 2 comme premier terme et 18 comme second terme.

   a) Si l’ordre est arithmétique, trouve les termes différents d, et cite les 5 premiers termes de l’ordre.

   b) si l’ordre est géométrique, trouve deux valeurs possibles possible pour un ratio commun r et cite les cinq termes de l’ordre géométrique dans chaque cas de figure.

3. Décris la suite logique de l’ordre de Fibonacci s: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,… et Définis le de manière récurrente.

4. Trouve la somme de l’addition suivante.

$$\sum_{j=0}^{8}(1+(-1)^{j})$$

5. Effectue l’addition double suivante.

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{i=1}^{2}(i-j)$$

Thème 1 : Nombres rationnels

Leçon 5 : Les Binomiaux, le triangle de Pascal et la théorie binomiale

Le sais-tu ?

Binomial Expressions
Soit $(x+y)^3$ l'expression entre parenthèses a deux termes c'est pourquoi on l'appelle binôme. Étudions ce qui se produit quand nous élevons en puissance des binômes. Pour le premier exemple, rappelez-vous que tout nombre autre que zéro élevé à la puissance 0 est toujours égal à 1.

$$(x + y)^0 = 1$$
$$(x + y)^1 = x + y = 1\cdot x + 1\cdot y$$
$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 1 \cdot x^2 + 2 \cdot xy + 1 \cdot y^2$$
$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3x y^2 + y^3 = 1 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2y + 3 \cdot xy^2 + 1 \cdot y^3$$

Y a-t-il une suite logique dans les coefficients ?

Figure A
Pascal's Triangle

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Cette table est appelée Pascal du nom du mathématicien Français Blaise Pascal (1623-1662) qui a démontré que ces nombres jouent un grand rôle en mathématique. Toutefois, le triangle était déjà connu en Chine depuis le 12^{e} siècle. Le triangle de Pascal est riche en suites remarquables. Il est aussi très utile. Avant de parler des suites de nombres, il est à noter qu'on fait constamment appel au seul chiffre 1 du triangle de la rangée 0^{e}.

Les Binomiaux, le triangle de Pascal et la théorie binomiale

Par conformité, nous appellerons également le 1 initial dans n'importe quelle rangée l'élément 0 de la rangée, et la diagonale initiale de 1s le zéro de la diagonale. Ainsi, 1 est l'élément zéro dans la quatrième rangée, 4 est le premier élément, 6 le deuxième élément, et ainsi de suite.

Figure B: Numbered rows and diagonals in Pascal's Triangle

0th diagonal
1st diagonal
2nd diagonal
3rd diagonal

0e → 1
1e → 1 1
2nd row → 1 2 1
3rd row → 1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

Remarque:

Pour $(x+y)^0$, le coefficient est :	1
Pour $(x+y)^1$, les coefficients sont	1 1
Pour $(x+y)^2$, les coefficients sont	1 2 1
Pour $(x+y)^{3,}$ les coefficients sont	1 3 3 1

Les nombres dans le triangle de Pascal

En raison de cette liaison avec les coefficients dans les développements binomiaux, la combinaison des nombres C (n, r), qui, comme vous vous rappelez, sont les mêmes nombres trouvés dans la triangle du Pascal, sont également connus comme **coefficients binomiaux.**

Quelle relation y a-t-il entre les nombres de combinaison, qui nous indiquent le nombre de sous-ensembles d'une certaine taille, et les coefficients que nous obtenons quand nous élevons à la puissance une expression binomiale ? Peut-être nous pouvons gagner de la perspicacité en regardant de près comment nous obtenons ces coefficients.

Quand on élève au coefficient $(x+y)^2$ en utilisant les propriétés de la distribution, on obtient :

$$(x+y)^2 = (x+y)\,(x+y) = xx + x\,y + yx + yy = x^2 + 2\,x\,y + y^2\ .$$

Si nous voulons un terme avec un x et un autre avec y, par exemple, nous pouvons choisir le x de (x + y) facteur du côté gauche, qui donne xy, ou de (x + y) facteur du côté droit, qui donne le yx. Une fois que nous choisissons d'où le terme x vient, nous avons seulement un choix pour d'où le terme y viendra. Ainsi le nombre total des manières d'obtenir un terme avec un x et un y est C(2, 1).1=2.1=2, ainsi 2 est le coefficient du terme xy sous la forme simplifiée.

Les Binomiaux, le triangle de Pascal et la théorie binomiale

Exerçons-nous avec la puissance 3.

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= (x+y)(x+y)(x+y)\\ &= (xx+xy+yx+yy)(x+y)\\ &= xxx+xxy+xyx+xyy+yxx+yxy+yyx+yyy\\ &= x3+3x^2y+3xy^2+y^3\end{aligned}$$

Pour obtenir le terme x2 y, nous devons choisir un x de deux des trois facteurs de (x + y) et un y du facteur restant. Si nous choisissons x des deux premiers facteurs que nous obtenons xxy, tandis que x de choix des premiers et troisième facteurs rapporte le xyx, et le x de choix des deux derniers facteurs donne le yxx. Comme avant, une fois que nous choisissons d'où les x viennent-ils, nous avons seulement un choix pour d'où est-ce que le y vient-il. Ainsi, il y a C(3, 2).1 = de 3.1 = 3 termes avec deux facteurs de x et un facteur de y, et 3 est le coefficient de x^2 y.

De ces exemples, nous pouvons appliquer ce modèle à tout nombre entier non négatif élevé à la puissance dans un développement binomial pour obtenir le théorème suivant. Mais avant d'énoncer le théorème binomiale, il convient de souligner que chaque terme du développement binomial, la somme des coefficients de x et y est égale à la puissance de la binomiale. Par exemple, dans le terme par x2 y, la puissance de x est 2, la puissance de y est 1, et 2 + 1 = 3 qui est la puissance de (x + y) dans cet exemple. En général, si *r* est la puissance est de x dans un terme de l'expression de $(x + y)^n$, puis, la puissance de y dans ce terme doit être n – r.

Théorème 1 Le coefficient de $x^r y^{n-r}$ dans le développement de $(x + y)^n$ est C(*n, r*) ou plus généralement.

Théorème binomial

Considérons que *x* et *y* sont des variables, et que *n* est un nombre entier positif.

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \sum_{j=0}^{n} C(n,j)\,x^{n-j}y^j\\ &= \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n\end{aligned}$$

.

Quel est le développement de $(x + y)^4$?

Solution: De la théorie binomiale découle ce qui suit:

$$\begin{aligned}(x+y)^4 &= \sum_{j=0}^{4} C(4,j)\,x^{4-j}y^j\\ &= C(4,0)x^4 + C(4,1)\,x^3y + C(4,2)\,x^2y^2 + C(4,3)xy^3 + C(4,4)y^4\\ &= x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4.\end{aligned}$$

Les Binomiaux, le triangle de Pascal et la théorie binomiale

Activités 1

***Dans le développement de $(x + y)^{10}$ quel est le coefficient de ?**

1. **a)** x^9y **b)** xy^9

2. **a)** x^6y^4 **b)** x^4y^6

3. **a)** x^3y^7 **b)** x^7y^3

4. **a)** x^5y^5 **b)** x^2y^8

5. Développe $(a – b)^4$ complètement.

6. Développe $(x - 2)^5$ complètement.

7. Développe $(35 – 2t)^3$ complètement.

8. **Trouve le coefficient de** x^4y^4 in le développement binomial de $(x + 3y)^9$.

9. Dans quelle rangée du Triangle de Pascal qu'on peut trouver un nombre donné apparaître une seule fois ?

10. Quelle suite logique vois-tu quand tu regardes le nombre dans les diagonales du dehors à l'intérieur à droite et dans la diagonale correspondante de l'exérieur à l'intérieur à gauche.

Les Binomiaux, le triangle de Pascal et la théorie binomiale

Activités 2

1. Trouve une suite dans les rangées du triangle de Pascal.

(a) Trouve la somme des éléments dans chacune des rangées de zéro à 4 dans la table de Pascal.

(b) Trouve une suite logique dans les résultats de la partie (a) et invente une règle générale.

(c) Utilise la figure A pour vérifier votre théorie de la 5^e à la 8^e.

(d) Donne un argument convainquant montrant que ce que vous avez deviné est par en b est correct.

2. Soit *S* un ensemble de 8 éléments. Utilise le triangle de Pascal pour répondre aux questions ci-après.

Questions.

a) Combien de sous-ensembles de *S* ont exactement 2 éléments.

b) Combien de sous-ensembles de *S* ont exactement 3 éléments ?

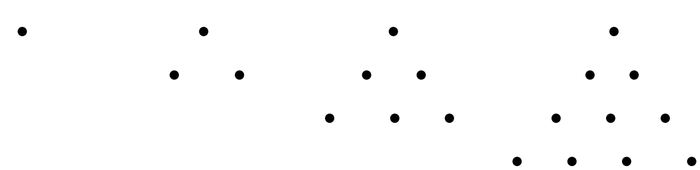
c) Combien de sous-ensembles de *S* ont exactement 4 éléments ?

d) Combien de sous-ensembles de *S* ont exactement 5 éléments ?

e) Combien de sous-ensembles de *S* y a-t-il en tout ?

3. Il y a dix (10) livres sur la liste de la lecture d'Abdou. Au cours de l'été, il doit lire quatre (4) d'entre eux. De combien de manières peut-il choisir quatre (4) livres à lire ?

4. Étudie le triangle de Pascal. Vois-tu une suite logique dans les nombres du triangle ? (Les nombres qui forment des triangles.):



A B C D

Thème II : Les Nombres Reels : Les Decimaux Et Les Pourcentages

Grades 7 - 8

Lecon 1 : Nombres réels et inégalités

Supplementary Lesson

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

Thème II : Nombres réels: décimaux et pourcentages

Leçon 1 : Nombres réels et inégalités

Le sais-tu ?

Les nombres réels

Exprimés sous la forme décimale, les nombres rationnels sont soit décimaux avec des nombres finis de chiffres (tels que 0.25, qui est $\frac{1}{4}$) ou répète les décimaux (tels que 0.333…, qui est un $\frac{1}{3}$).

Les nombres irrationnels sont les nombres qui ne peuvent pas être exprimés sous la forme x/y. une fois écrits sous la forme décimale, les nombres irrationnels ne se terminent ni ne répètent un modèle. Par exemple, le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel parce qu'il ne peut pas être exprimé exactement sous une forme x/y ; comme décimale, nous pouvons l'écrire en tant que 1.414213565..., où les points signifient que les chiffres continuent pour toujours sans modèle. Le nombre $\boldsymbol{\pi}$ est également un nombre irrationnel, qui comme décimale est écrit 3.14159265….

L'ensemble des **nombres réels** se compose des nombres rationnels et irrationnels ; par conséquent il est représenté par l'axe gradué en entier. Chaque point sur l'axe a un nombre réel correspondant, et chaque nombre réel a un point correspondant sur l'axe gradué. En d'autres termes, les nombres réels sont les nombres entiers et "ce qui est entre". Quelques nombres réels choisis sont indiqués sur l'axe gradué présenté.

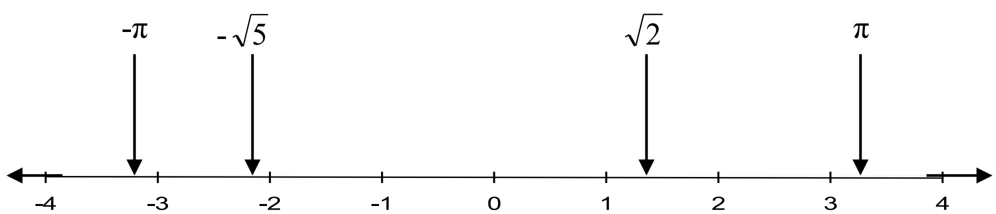
Exemples :

- 25 est un nombre naturel, c'est-à-dire un nombre rationnel et réel.
- -6 est un nombre entier, c'est-à-dire un nombre rationnel et réel.
- Le nombre $\frac{2}{3}$ est un nombre rationnel, c'est-à-dire un nombre réel.
- Le nombre 7.98418…est irrationnel; les points indiquent que les chiffres continuent à l'infini sans répétition de modèle. C'est aussi un nombre réal.

Nombres réels et inégalités

The Réel axe gradué et inéqualities

L'ensemble des nombres réels, noté **R,** joue un rôle dominant en mathématiques. Nous supposons que le lecteur s'est familiarisé avec la représentation géométrique de **R** au moyen des points sur une ligne droite. Comme désigné ci-dessous, un point, a appelé **l'origine**, est choisi comme point de départ) et un autre point, habituellement à la droite de 0, pour représenter 1. Puis, Il y a une manière naturelle d'arranger deux à deux les points sur l'axe ligne des nombres réels, c'est-à-dire que chaque point représentera un réel et unique nombre et chaque réel nombre sera représenté par un point unique. Pour cette raison nous nous référons à **R** comme le **réel axe** et employons les mots point et nombres de manière interchangeable.



Les nombres positifs

Les nombres à la droite de 0 sur le réel axe **R**, c'est-à-dire du même côté que 1, sont les **nombres positifs** ; les nombres qui sont à la gauche de 0 sont les **nombres négatifs**. L'ensemble des nombres positifs peut être décrit par les axiomes suivants :

[P_1] si $a \in$ **R**, et si l'une des assertions suivantes est vraie: a positif; $a = 0$; $-a$ est positif.
[P_2] si $a, b \in$ **R** sont positifs, puis leur total $a + b$ et leur produit $a \cdot b$ sont aussi positifs.

Seulement si a est positif, si et seulement si $-a$ est négatif.

Exemple: Nous montrons, en utilisant seulement **[P_1]** et **[P_2]**, que le nombre réel 1 est positif.
Par **[P_1]**, l'un 1 ou l'autre -1 est positif. Si -1 est positif puis, par **[P_2]**, le produit (-1) (-1) = 1 est positif. Mais ceci contredit **[P_1]** ce qui affirme que 1 et -1 ne peuvent pas être positifs. Cause pour laquelle, l'hypothèse que -1 est faux et aussi 1 est positif.

Exemple: Le nombre réel -2 est négatif. Si dans l'exemple précédent, 1 est positif alors, si par **[P_2]**, la somme de 1 + 1 = 2 est positif; d'où -2 n'est pas positif, -2 est négatif.

Nombres réels et inégalités

ORDRE

Une **relation d'ordre** dans **R** est définie en utilisant le concept de positivité.

Définition : Le nombre réel a est **plus petit que** le nombre réel b, écrit $a < b$, si la différence $b - a$ est positive.

Les notations suivantes sont aussi utilisées :

a > b, lis a est plus grand que b,	signifie b < a b plus petit que a.
a $\leq$ b, lis a est plus petit ou égal à b,	signifie a < b ou a = b
a $\geq$ b, lis a est plus grand ou égal à b,	signifie b $\leq$ a

Géométriquement parlant,

a < b signifie que a est à gauche de b sur l'axe des réels **R.**
a > b signifie que a est à la droite de b sur l'axe des réels **R.**

Exemples: $2 < 5$, $-6 \leq -3$, $4 \leq 4$, $5 > -8$

Exemple : Un nombre réel x est positif si x > 0, et x est négatif si x < 0. Dans x $\neq$ 0, x^2 est toujours plus grand que 0 : x2 > 0.

Example: La notation $2 < x < 5$ signifie $2 < x$ et aussi $x < 5$; d'où x sera entre 2 et 5 sur l'axe des réels.

Nous nous référons aux relations <, >, $\leq$ et $\geq$ comme **inégalités afin de les distinguer** de la relation d'égalité =. Nous nous référeront également à < et > en tant qu'inégalités. Énonçons maintenant les propriétés de base se rapportant aux inégalités qui seront abordées à travers ce chapitre.

Theorem A: Soient a, b and c des nombres réels.

i. Le sens d'une inégalité ne change si l'on ajoute le même nombre réel de part et d'autres.
ii. Si $a < b$, puis $a + c < b + c$.
   Si $a \leq b$, puis $a + c \leq b + c$.

iii. Le sens d'une inégalité ne change si on multiplie les cotés par le même nombre réel positif :
iv. Si $a < b$ *et* $c > 0$, puis $ac < bc$.
   Si $a \leq b$ et $c > 0$, puis $ac \leq bc$.
v. Le sens d'une inégalité est renversé si les côtés sont multipliés par le même nombre négatif.
vi. Si $a < b$ *et* $c < 0$, puis $ac > bc$.
   Si $a \leq b$ et $c < 0$, puis $ac \geq bc$.

Nombres réels et inégalités

(FINI) INTERVALES

Soient a et b deux nombres réels, avec $a < b$. Puis l’ensemble de tous les nombres réels x répondant aux caractéristiques ci-après :

> $A < x < b$ est appelé **intervalle ouvert** de a à b.
> $A \leq x \leq b$ est appelé **intervalle fermé** de a à b
> $A < x \leq b$ est appelé **intervalle ouvert-fermé** de a à b.
> $A \leq x < b$ est appelé **intervalle fermé-ouvert** de a à b

Les points a et b s'appellent les **points-finaux** de l'intervalle. Observez qu'un intervalle fermé contient ses deux points finaux, un intervalle ouvert ne contient ni l'un ni l'autre point final, et un intervalle ouvert-fermé et fermé-ouvert contient un de ses points finaux.

Intervalle ouvert : $a < x < b$

Intervalle fermé : $a \leq x \leq b$

Intervalle ouvert-fermé: $a < x \leq b$

Intervalle fermé-ouvert : $a \leq x < b$

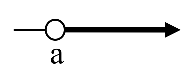
Les intervalles ouvert-fermé et fermé-ouvert sont encore dits mi-ouvert ou mi-fermé.

INFINITE INTERVALS

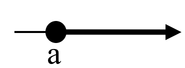
Soit a un nombre réel. Puis l’ensemble de tous les nombres réels x répondant à $x < a$, $x \leq a$, $x > a$ or $x \geq a$ s’appelle in intervalle infini.

$x < a$

$x \leq a$



$x > a$



$x \geq a$

Nombres réels et inégalités

Les inégalités linéaires à un inconnu

Chaque inégalité linéaire à un inconnu x peut être réduite à la forme

$ax < b$, $ax \leq b$, $ax > b$ or $ax \geq b$

Si $a \neq 0$, puis les deux cotés de l'inégalité peuvent être multipliés 1/a avec le sens de l'inégalité est renversé si a est négatif. Ainsi l'inégalité peut être réduite à:.

$x < c$. $x \leq c$, $x > c$ or $x \geq c$

Quel ensemble de solution est un intervalle infini ?

Exemple: Considère cette inégalité $5x + 7 \leq 2x + 1$. En ajoutant (ou en transposant) $-2x - 7$ de part et d'autre on obtient :

$5x - 2x \leq 1 - 7$ or $3x \leq -6$

En multipliant les deux cotés par $\frac{1}{3}$ (ou en divisant les deux cotés par 3) on obtient finalement : $x \leq -2$

Exemple: Considère l'inégalité $2x + 3 < 4x + 9$. En transposant, on obtient

$2x - 4x < 9 - 3$ or $-2x < 6$

En multipliant les deux cotés de l'inégalité par $-\frac{1}{2}$ (ou en divisant les deux cotés par -2) et en renversant l'inégalité depuis $-\frac{1}{2}$ si négatif, on obtient :

$x > -3$

La valeur absolue

La **valeur absolue** d'un nombre réel x, écrit $|x|$, est définie par :

$$|x| = \begin{cases} x & if \quad x \geq 0 \\ -x & if \quad x < 0 \end{cases}$$

C'est, si x n'est pas négative, puis $|x| = x$, et si x est négatif puis $|x| = -x$. Ainsi la valeur absolue de chaque nombre réel n'est pas négatif : $|x| \geq 0$ pour chaque $x \in \mathbf{R}$.

Nombres réels et inégalités

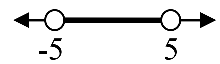
Géométriquement parlant, la valeur absolue de x est la distance entre le pont X sur l'axe des réels et l'origine, c'est-à-dire le point 0. En outre, la distance entre deux points a, b $\in$ **R** est $|a-b| = |b-a|$.

Exemple : $|-2| = 2$, $|7| = 7$, $|-\pi| = \pi$, $|-\sqrt{2}| = \sqrt{2}$

Exemple : $|3-8| = |-5| = 5$ et $|8-3| = |5| = 5$

Exemple : Le constat, 5 peut être interprété comme étant la distance entre x et l'origine est moins de 5 ; par conséquent x doit se trouver entre -5 et 5 sur l'axe des réels. En d'autres termes,

$|x| < 5$ et $-5 < x < 5$



Ont une signification identique et similaire.

$|x| \leq 5$ et $-5 \leq x \leq 5$

Ont la même signification.

Les faits essentiels au sujet de la valeur absolue sont les suivants :

Théorème B: Soient a et b n'importe quel réel nombre. Puis,

(i) $|a| \geq 0$, et $|a| = 0$ si $a = 0$

(ii) $-|a| \leq a \leq |a|$

(iii) $|ab| = |a| \cdot |b|$

(iv) $|a+b| \leq |a| + |b|$

(v) $|a+b| \geq |a| - |b|$

Nombres réels et inégalités

Activités 1

1. Cite six (6) nombres réels différents ; trios (3) nombres rationnels et trois (3) nombres irrationnels.

Écrit chaque affirmation en utilisant le signe de l'inégalité :

2. a. a est plus petit que b. b. a est plus grand que b.

3. c. a n'est pas plus grand que b. d. a n'est pas plus petit que b

4. e. a est plus petit ou égal à b f. a n'est pas plus grand ou égal à b

Récris les relations géométriques suivantes entre les nombres réels donnés en utilisant le signe de l'inégalité.

5. a. y se trouve à la droite de 8 b. x se trouve entre -3 and 7

6. c. z se trouve à gauche de -3 d. w se trouve entre 5 et 1

Décris et fais le diagramme de chacun des intervalles suivants :

7. a. $2 < x < 4$ b. $-1 \leq x \leq 2$ c. $x > -1$

8. d. $-3 < x \leq 1$ e. $-4 \leq x < -1$ f. $x \leq$

La valeur absolue

Évalue :

9. a. $|3-5|$ b. $|-3+5|$ c. $|3-7|$ - $|-5|$

Récris les opérations sans le signe de la valeur absolue. :

10. a. $|x| \leq 3$ b. $|x-2| < 5$ c. $|2x-3| \leq 7$

Nombres réels et inégalités

Activités 2

Résous chaque inégalité.

1. a. $3 < 2x - 5 < 7$ b. $-7 \leq -2x + 3 \leq 5$

Valeur absolue

Évalue:

2. a. $|3-5|$ b. $|-3+5|$ c. $|-3-5|$ d. $|3-7|$ - $|-5|$

3. Résous : $\frac{1}{2}x + \frac{x-2}{3} < 2x - \frac{1}{12}$

Résous chacune des inégalités et fais le diagramme de la solution.

4. a. $3x - 1 \geq 4x + 2$
   b. $x - 3 > 1 + 3x$
   c. $2x - 3 \leq 5x - 9$

Récris chacune des opérations sans le signe de la valeur absolue.

5. a. $|x| \leq 3$ b. $|x-2| < 5$ c. $|2x-3| \leq 7$

Thème II : Les nombres réels : décimaux and pourcentages

Leçon 2 : Les puissances de (10) et addition avec les décimaux

Le sais-tu ?

Les puissances de 10 indiquent comment multiplier par lui-même.
Par exemple :

$10^2 = 10 \times 10 = 100$

$10^6 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 1,000,000$

Les puissances négatives indiquent les correspondants réciproques des puissances positives.

Par exemple:

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0.01$$

$$10^{-6} = \frac{1}{10^6} = \frac{1}{1,000,000} = 0.000001$$

Ainsi, les puissances de 10 suivent deux règles de base.

1. un exposant positif indique combien de 0s suivi le 1. For exemple, 10^0 est 1 Suivi de rien ; 10^8 est 1 suivi de huit 0s.
2. un exposant négatif indique de combien de rangs faut-il déplacer la virgule vers la droite y compris le 1. For exemple, $10^{-1} = 0.1$ a un rang vers la droite ; $10^{-6} = 0.000001$ a six rangs vers la droite de la virgule

Multiplier et diviser des puissances de 10 Multiplier des puissances de10 simples équivaut à additionner des exposants$10^n \times 10^m = 10^{n+m}$

Exemples: A. $10^4 \times 10^7 = 10,000 \times 10,000,000$

$10^{11} = 100,000,000,000$

B. $10^5 \times 10^{-3} = 100,000 \times 0.001$

$10^2 = 100$

C. $10^{-8} \times 10^{-5} = 0.00000001 \times 0.00001$

$10^{-13} = 0.0000000000001$

Les puissances de (10) et addition avec les

Diviser des puissances de 10 équivaut à la soustraction des exposants. $\frac{10^n}{10^m} = 10^{n-m}$. Par exemple:

Exemples: C. $\frac{10^5}{10^3}$ = 100,000 $\div$ 1000 = 100 = 10^2

D. $\frac{10^3}{10^7}$ = 1000 $\div$ 10,000,000 = 0.0001 = 10^{-4}

E. $\frac{10^{-4}}{10^{-6}}$ = 0.0001 $\div$ 0.000001 = 10^2

Puissance des puissances de 10
On peut utiliser les règles de la multiplication et de la division pour augmenter les puissances de 10 à d'autres puissances.
Par exemple:

F. $(10^4)^3 = 10^4 \times 10^4 \times 10^4 = 10^{4+4+4} = 10^{12}$

G.

Additionner et soustraire des puissances de 10

Il n'y a pas de raccourci pour additionner ou soustraire des puissances de 10, comme c'est le cas pour la multiplication et la division. Les valeurs doivent être écrites en notation abrégée.

Exemples: G. $10^6 + 10^2$ = 1,000,000 +100
=1,000,100

H. $10^8 + 10^{-3}$ = 100,000,000 + 0.001
= 100,000,000.001

I. $10^7 - 10^3$ = 10,000,000 – 1000
= 9,999,000

$(10^n)^m = 10^{n \times m}$

Decimals Puisque notre système des nombres est un système de position basé sur dix chiffres {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}numéraux, nous avons utilisé le terme système décimal. En général, nous nous référons aux expressions telles que 0.235 ou 2.7142 en tant que décimal comme opposé à 24, 98, 0 ou 2478, dont on appelle souvent nombres entiers. En fait, les deux sont part et partie d'un même système. La forme développée de 2478 est

$$2478 = 2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$$
$$= 2000 + 400 + 70 + 8$$

La forme développée de 0.235 est

$$0.235 = 2 \cdot \frac{1}{10^1} + 3 \cdot \frac{1}{10^2} + 5 \cdot \frac{1}{10^3}$$

Et la forme développée de 23.47 est

$$23.47 = 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 4 \cdot \frac{1}{10^1} + 7 \cdot \frac{1}{10^2} \quad = 20 + 3 + \frac{4}{10} + \frac{7}{100}$$

Les puissances de (10) et addition avec les décimaux

Addition et soustraction des décimaux

Supposons que nous souhaitons additionner 2.71 et 32.762, nous ferons ce qui suit :

$$2,71 + 37,762 = 40,472$$

Pour ajouter des décimales à la main, écris les nombres dans le modèle vertical alignant les virgules sous les virgules, et on effectue l'addition comme s'il s'agissait de nombres entiers sans tenir compte de la virgule qu'on placera sous les virgules par la suite.

Supposons maintenant qu'on veuille soustraire 2, 71 de 37, 762, on effectuera ce qui suit :

$$37,762 - 2,71 = 35,052$$

Ainsi, comme dans l'addition, on écrit les nombres l'un sous l'autre, les virgules sous les virgules. On effectue l'opération comme dans le précédent exemple.

Multiplication de nombres décimaux

Supposons qu'on veuille calculer le produit de (31.76) · (4.6), nous opérerons comme suit :

$$(31.76) \times (4.6) = 146.096$$

Or

$$\begin{array}{r} 31,76 \\ \times \quad 4,6 \\ \hline 19\,056 \\ 127\,04 \\ \hline 146,096 \end{array}$$

<u>Pour multiplier deux décimaux:</u>

1. Multiplier comme s'il s'agissait de nombres entiers.
2. Compte le nombre de chiffres qu'il y a dans les parties décimales de chaque décimal, additionne-les, et sers-toi de *t* pour nommer leur somme.
3. Finalement, place la virgule dans le produit en comptant autant de chiffres qu'il y a dans *t* de la droite vers la gauche.

Les puissances de (10) et addition avec les décimaux

Diviser des décimaux

Suppose qu'on veuille diviser 537.6 by 2.56, on a :

$$537.7 \div 2.56 = 210$$

Dans ce problème, il s'agit de diviser 52.760 par 256 ; c'est-à-dire, à diviser des nombres entiers. C'est comme si l'on était confronté à une division semblable à la suivante :

$$2.56\overline{\smash{)}537.6},$$

On demande souvent aux élèves de "déplacer la virgule à la fois dans le dividende et le diviseur de deux rangs vers la droite pour rendre le diviseur entier". Multiplier les deux termes par un même nombre pour justifier la règle, manuellement on a :

$$\begin{array}{r} 210. \\ 2.56\overline{\smash{)}537.60.} \\ \underline{512} \\ 256 \\ \underline{256} \\ 0 \end{array}$$

Nous vérifions notre réponse en multipliant le diviseur par le quotient **:**

$$\begin{array}{r} 2.56 \\ 210 \\ \hline 2560 \\ \times\ 512 \\ \hline 537.60 \end{array}$$

Décimaux infinis et nombres rationnels

Aussi étonnant soit-il, ce ne sont pas tous les systèmes décimaux nationaux se terminant par des expansions décimales. Par exemple, il est bien connu que

$$\frac{1}{3} = 0.333 \ldots - 0.\bar{3}$$

là où les trois points indiquent que la décimale continue à l'infini, et la barre au-dessus des 3 indique le chiffre ou le groupe de chiffres qui se répètent.

Un décimal infini qui a la propriété qu'un chiffre ou un groupe de chiffres se répète à l'infini d'un certain point au-dessus s'appelle un décimal périodique ou répété. Le nombre de chiffres dans le groupe répété s'appelle la durée la période.

Chaque décimal répété représente un nombre raisonnable a/b. Si a/b est sous la forme la plus simple, b doit contenir un facteur principal autre que 2 ou 5. Réciproquement, si a/b est un nombre rationnel sa représentation décimale doit être répétée.

Les puissances de (10) et addition avec les décimaux

Ranger les décimaux

L'ordre des décimaux, c’est comme ordonné des nombres entiers. Par exemple, pour déterminer le plus grand nombre entre 247.761 et 2.326.447 écrivez les deux nombres comme s’ils ont le même nombre de chiffres ; c'est-à-dire, écrivez

0,247,761 et 2,326,447

Puis déterminez alors le premier rang à partir de la gauche où les chiffres diffèrent. Il découle de l'idée de la représentation de la position que le nombre entier plus grand est le nombre entier avec le plus grand de ces deux chiffres différents. Dans le cas présent, les premiers chiffres diffèrent et ainsi de suite.

0,247,761 < 2,326,447

Dans un exemple semblable,

34,716 < 34,723

Puisque le premier pair de chiffres correspondants qui sont différents sont le 1 et le 2 et 1<2.

Pour ranger deux décimales positives, détermine les premiers chiffres à partir de la gauche qui diffèrent. Le nombre décimal dont les deux premiers chiffres sont plus petits est le plus petit nombre décimal.

Exemple Lequel des nombres décimaux suivants est le plus petit ?

23, 45 et 23, 4545

Solution Puisque 23.45 = 23.4545….., et que les premiers chiffres de la gauche sont 0 et 5. Puisque 0 < 5, on en déduit que 23.45 < 23.4545

Les puissances de (10) et addition avec les

Activités 1

* Soit a) 10^3 b) 10^4 c) 10^5 d) 10^9 e) 10^{12}
f) 10^{-3} g) 10^{-4} h) 10^{-5} i) 10^{-9} j) 10^{-12}

1. Dans (*) exprime sous la forme d'un nombre entier ou en nombre décimal :

   a), d), g), and h)

2. Dans (*) additionne les puissances.

   b) + d) et c) + h)

3. Dans (*) soustrais les puissances.

   c) – b) and a) – g)

4. Dans (*) multiplie.

   e) · i) and f) · h)

5. Dans (*) divise

   j) ÷ c) et h) ÷ j)

6. Dans (*) élève c) à la puissance 4.

7. Fais un calcul mental pour déterminer une réponse approximative, et puis, effectue chacune de ces opérations pour vérifier ta réponse.

   a) 23, 47 + 7, 81 b) 351, 42 – 417, 815

8. Calcule les produits suivants.

   a) (471, 2) · (2, 3) b) (36, 34) · (1, 02)

9. Divise 36, 9 par 1, 23 et vérifie ta réponse.

10. Écrivez chacune de ces décimales de répétition sous la forme a/b où a et b sont des nombres entiers et des fractions de forme simple. Vérifiez ta réponse en divisant a et b avec ta calculatrice.

Les puissances de (10) et addition avec les décimaux

Activités 1

1. Range les nombres suivants du plus petit au plus grand.

   $\frac{11}{24}$, $\frac{3}{8}$, 0, 37, 0.4584, 037666…, 0.4583

2. Exprime ces deux nombres réels sous une forme développée.

   a) 54,312 b) 21.345

3. Complète les vides de sorte que chacune de ces suites soit une progression arithmétique.

   3.4, 4.3, 5.2, _____, _____, ______
   a) -31.56 _____, -21.10, _____, ______,______,______
   b) 0.0114, _____,______,0.3204,______,______
   c) 1.07, _____,______,______,8.78,_____

4. Complète les vides de sorte que chacune de ces suites soit une progression géométrique.

   a) 2.11,2.327,_____,_____,_____
   b) 35.1,_____,2.835,_____,_____
   c) 6.01,_____,_____,0.75125,______

5. Utilise la division pour trouver la forme décimale développée de $\frac{3}{7}$. Quels sont les décimaux répétés ?

Thème II : Les nombres réels : décimaux et pourcentages

Leçon 3: Rapport et proportion

Le sai-tu ?

Rapport (Ratio)

Lors des séances d'entrainement de basket-ball, Caralee a raté 18 lancers francs sur 45 tentatives. Puisqu'elle a réussi 27 lancers francs, nous pouvons dire que le rapport entre le nombre de lancers a manqué au nombre réussi est de 18 pour 27. Ce qui peut être exprimé par la fraction 18/27 ou, de manière archaïque, par la notation 18 : 27. Nous emploierons toujours la première notation, celle de la fraction dans les pages ci-après.

Les autres rapports des entrainements au basket-ball de Caralee sont :

- Le rapport nombre de tirs réussis- nombre d'essais est – 27 / 45,
- Le rapport tirs ratés-nombre d'essais est – 18 / 45,
- Le rapport tirs effectués – tirs ratés est – 27 / 18.

Si a et b sont des nombres réels avec $b \neq 0$, le rapport ***a* pour *b*** est la fraction *a / b*.

Les rapports se produisent très fréquence dans la vie quotidienne. Si vous employez 30.4 litres d'essence pour 400.4 km, l'efficacité de votre voiture est mesurée en km par gallon sous le rapport 400.4/10.4 ou 38.5 km par gallon. Si l'école Clémenceau a 405 élèves et 15 professeurs, le rapport de professeur-élève est le quotient 405/15. Si Mamadou Diop atteignait 56 coups sur 181 base-ball, sa moyenne sera de 56/181. On peut multiplier les exemples.

Rapport et proportion

Comment déterminer le rapport

Détermine les rapports suivants
.

a. Le rapport garçons-filles au lycée Martin Luther King s’il y a 285 garçons et 228 filles.

b. Le rapport garçons- nombre d’élèves total dans la partie (a).

Solution

a. Le rapport demandé est 285 / 228.
b. Puisque le nombre d’élèves est 285 + 228 (ce qui donne, 513), le rapport sollicité est 285 / 513.
c.

Le rapport garçons- nombre d’élèves au lycée Martin Luther King est 285/513 ou 285 pour 513. C'est certainement correct, mais n’est pas aussi informatif que s’il était écrit dans une forme simplifiée.

donc,

$$\frac{285}{513} = \frac{5}{9}$$

$285 \div 57 = 5$
$513 \div 57 = 9$

Ce qui veut dire que 5 / 9 (ou plus d’1 / 2) des élèves du lycée Martin Luther King sont des garçons. Réduire un rapport dans sa plus simple expression est souvent beaucoup plus informatif.

Simplifier un rapport

Simplifie ce rapport.

Le rapport de 385 pour 440

Solution: Le rapport 385 pour 440 est le quotient de 385 / 440. En le simplifiant, on obtient :

$$\frac{385}{440} = \frac{7}{8}$$

Rapport et proportion

Détermination d'un rapport moins évident

Si un septième des élèves du lycée John F. Kennedy sont des non-nageurs, quel est le rapport des non-nageurs aux nageurs ?

Solution

Le rapport désiré est le nombre de non-nageurs divisés par le nombre de nageurs. Pouvons-nous le déterminer à partir des informations fournies ? En l'état, la réponse est non mais le problème peut cependant être résolu. Supposons qu'il il y a n élèves dans l'école. Alors $\frac{n}{7}$ sont les non-nageurs et $\frac{6n}{7}$ sont des nageurs. Ainsi, le rapport désiré est

$$\frac{\frac{n}{7}}{\frac{6n}{7}} = \frac{n}{7} \cdot \frac{7}{6n} = \frac{1}{6}.$$

La proportion

Les rapports permettent de faire des comparaisons claires quand les informations dont on dispose sont insuffisantes. Par exemple, aux entrainements de basket-ball, Caralee a fait 27 pour 45 lancers francs et Sonja a fait 24 pour 40 tentatives. Quel joueur semble être le meilleur lanceur ? Pour Caralee, dire que le rapport des lancers effectués pour les essais est 27/45 équivaut à dire qu'elle a fait 3 /5 de ses tirs. C'est-à-dire,

$$\frac{27}{45} = \frac{3}{5}.$$

Il en est de même pour Sonja. Le rapport tirs effectués- tentatives est :

$$\frac{24}{40} = \frac{3}{5},$$

Ce qui laisse deviner que les deux filles sont toutes les deux capables d'accomplir des tirs. En raison de son importance dans de telles comparaisons, l'égalité de deux rapports s'appelle une **proportion.**

Définition: Si a/b et c/d sont deux rapports et

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

Cette égalité s'appelle une **proportion.**

Rapport et proportion

Nous savons que

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Pour les nombres entiers *a, b, c,* et *d*, si, et seulement si, $ad = bc$. Ce même argument se défend si a*, b, c*, et *d* sont des nombres réels. Ceci qui nous conduis au théorème suivant.

Théorème : Conditions pour avoir une proportion
L'égalité

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Est une proportion si, et seulement si, $ad = bc$.

La détermination des proportions

Détermine x pour faire de l'égalité ci-dessus une proportion.

$$\frac{28}{49} = \frac{x}{21}$$

Solution. Nous utilisons le théorème précédent, dont les quantités multipliées les deux côtés de l'égalité par le produit des dénominateurs ou de la "multiplication croisée" comme on le disons souvent.

$$\frac{28}{49} = \frac{x}{21}$$

$$28 \cdot 21 = 49x$$

$$\frac{28 \cdot 21}{49} = x$$

$$12 = x$$

ainsi $\frac{28}{49} = \frac{12}{21}$

donc, $\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1,$ {ajoute1 des 2 côtés}

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{b} = \frac{c}{d} + \frac{d}{d} \qquad \{\text{puis } \frac{b}{b} = 1 = \frac{d}{d}\}$$

et $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ {addition des fractions}

Rapport et proportion

Applications des proportions

Table A

Distance Traveled in *t* Hours at 55 Miles per Hour				
t = time	*d* = distance		*t* = time	*d* = distance
1	55		5	275
2	110		6	330
3	165		7	385
4	220		8	440

Supposons qu'une voiture roule à une vitesse constante de 55 kilomètres par heure. La table ci-dessus donne les distances que la voiture va parcourir dans une période de temps donnée.
Les rapports d/t sont identiques pour divers temps indiqués qui sont :

$$\frac{55}{1}=\frac{110}{2}=\frac{165}{3}=\frac{220}{4}=\frac{275}{5}=\frac{330}{6}$$

ainsi de suite. Aussi, chaque pair de rapport de la liste forme une proportion. En effet, $d/t = 55$ pour chaque pair d et t. Ceci peut être encore exprimé en disant que la distance parcourue à une vitesse constante est proportionnelle au temps effectué. Dans l'exemple ci-dessus

$$d = 55t$$

pour chaque couple d et t. Le nombre 55 s'appelle **constant de proportionnalité.**

Définition *y* proportionnel à *x*

Si les variables x and y sont liés par une équation

$$y = kx, \text{ qui est le même } \frac{y}{x} = k$$

puis **y est dit proportionnel à x** et k est appelé **constant de proportionnalité.**

Cette situation est extrêmement courante dans la vie quotidienne. L'essence consommée par votre voiture est proportionnelle aux kilomètres effectués. Le coût des crayons achetés est proportionnel au nombre de crayons achetés. Le revenu de la tombola de l'école est proportionnel au nombre de billets vendus, et ainsi de suite.

Rapport et proportion

Activités 1

*** Il y a 30 filles et 24 garçons dans une 8eannée.**

1. Quel est le rapport :
   a) garçons-filles ? b) filles-élèves ?

2. Quel est le rapport
   a) garçons - élèves. b) filles - garçons ?

3. Quel est le rapport
   a) élèves - filles b) élèves - garçons ?

4. Trouve les fractions proportionnelles.
   a) $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ b) $\frac{21}{28} = \frac{27}{36}$ c) $\frac{7}{28} = \frac{8}{31}$

5. Trouve les fractions proportionnelles

   a) $\frac{51}{85} = \frac{57}{95}$ b) $\frac{14}{49} = \frac{18}{60}$ c) $\frac{20}{55} = \frac{28}{48}$

6. Simplifie chacun de ces rapports..

   a) un rapport de 24 pour 16 b) un rapport de 296 pour 111

   c) un rapport de 248 pour 372 d) un rapport de 209 pour 341

7. Trouve la valeur de x pour faire de cette égalité une proportion.
   a) $\frac{35}{63} = \frac{20}{x}$ b) $\frac{2.11}{3.49} = \frac{1.7}{x}$

8. Détermine la valeur de r pour faire de chaque égalité une proportion.
   a) $\frac{6}{14} = \frac{r}{21}$ b) $\frac{8}{12} = \frac{10}{r}$

9. Détermine les valeurs de s et t pour faire de chaque égalité une proportion.
   a) $\frac{51}{t} = \frac{85}{95}$ b) $\frac{47}{3.2} = \frac{s}{7.8}$

10. Quand y est proportionnel à x^3 et y = 32 quand x=12; détermine la valeur de y quand x=6.

Rapport et proportion

Activités 2

1. Si s est proportionnel à t et $s = 62.5$ quand t=7, quelle est la valeur de s quand $t = 10$?

2. Le mât du drapeau de l'école élémentaire du Point E a une ombre de 9,8 de long au même moment l'ombre de M. Schaal mesure 3,2. Si M. Schaal mesure 6,3, quel sera la taille du mât à l'unité près.

3. Le kilomètre est un peu plus (de six tenths) un mile. Si la vitesse limite le long d'un bout de l'autoroute au Canada est 90 kilomètres par heure, à quelle vitesse pouvez-vous rouler en miles par heure pour ne pas dépasser la vitesse limite ?

4. a) Si y est proportionnel à x^2 et $y = 27$ quand $x = 6$, détermine y quand $x = 12$.
   b) Détermine le rapport de y-valeur en (a).
   c) Si y et x sont liés comme en (a), qu'en est-il de la valeur de y si la valeur de x est double ? Explique.

5. Si y est proportionnel à $1/x$ et $y=3.5$ quand $x = 84$, détermine y lorsque $x=14$.
   (Suggestion: $y=k(1/x)$.)

Thème II : Nombres réels : Décimaux et pourcentages

Leçon 4: Les pourcentages

Le sais-tu ?

Une des notions plus importantes utilisée en mathématiques à l'école pour parler des rapports est celle du pourcentage. Ainsi, 50% est le rapport 50/100, et ceci est rapidement réduit à la fraction ½ encore écrite 0.50 sous la forme décimale. Ainsi, si j'ai 98$ et vous donne 50% de ce que j'ai, vous aurez :

$$\frac{1}{2} \cdot \$98 = \$49 \qquad \text{or} \qquad 0.5 \times \$98 = \$49.$$

Le ‘‘de ’’ dans la phrase précédente introduit la notion de multiplication, par conséquent :

50% de	signifie	$50\% \times$,
$\frac{1}{2}$ de	signifie	$1/2 \times$,
0.5 de	signifie	$0.5 \times$.

Si r est un nombre réel non négatif, puis r pourcent écrit r% est le rapport :

$$\frac{r}{100}.$$

Puisque r % est défini comme le rapport r/100 le diviser par100 c’est déplacer de deux rangs le décimal vers la gauche, il est facile d’écrire le pourcentage donné sous une forme décimal. Par exemple :
12 % = 0.12, 25 % = 0.25, 130 % = 1.3, etc. Inversement, pour écrire un décimal sous la forme d’un pourcentage, il faut simplement déplacer le décimal de deux rangs vers la droite.

Ainsi, 0.125 = 12.5% or $12\frac{1}{2}$% 0.10 = 10%, 1.50% ainsi de suite.

Convertir des décimaux en pourcentage

Exemple Exprime les décimaux suivants en pourcentage.
(a) 0.25 (b) 0.333 … (c) 2.15

SOLUTION

(a) 0.25 = 25%
(b) 0.33 … = 33.333 …%
(c) 1.255 = 125.5%

Les pourcentages

Convertir des pourcentages en décimal

Exemple : Exprime les pourcentages suivants en décimaux.

(a) 40% (b) 12% (c) 127%

Solution (a) 40% = 0.40
(b) 12% = 0.40
(c) 127%=1.27

Convertir des pourcentages en fractions

Exemple Exprime chacun de ces pourcentages sous forme de fractions simplifiées.

(a) 60% (b) 66 2/3% (c) 12.5%

Solution (a) Par définition 60% signifie 60/100. Donc,

$$60\% = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}.$$

(b) Ici

$$37\frac{1}{2}\% = \frac{37\frac{1}{2}}{100} = \frac{\frac{65}{2}}{100} = \frac{65}{200} = \frac{13}{40}.$$

(c) $66\frac{2}{3}\% = \frac{66\frac{2}{3}}{100} = \frac{\frac{200}{3}}{100} = \frac{2}{3}.$

(d) $125\% = \frac{125}{100} = \frac{5}{4} = \text{or } 1\frac{1}{4}.$

Les pourcentages

Convertir des fractions en pourcentages.

Exemple Exprime les fractions suivantes en pourcentages.

(a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{1}{3}$

Solution I

(Utilisant les proportions) Puisque les pourcentages sont des rapports, il est possible d'utiliser des variantes pour déterminer des pourcentages souhaités.

(a) Suppose $1/8 = r\% = r/100$. Then

$$r = 100 \cdot \frac{1}{8} = 12.5$$

et

$$r\% = 12.5\%$$

(b) Soit $1/3 = s\ \% = s/100$. Puis

$$s = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3} = 33.\bar{3}$$

3 3

et $$s\% = 33.\bar{3}\,\%$$

Solution II

(Utilisant les décimaux) Nous écrivons ci-après les fractions sous forme de décimaux et puis sous forme de pourcentages.

(a) En divisant

$$\frac{1}{8} = 0.125 = 12.5\%$$

(b) Ici

$$\frac{1}{3} = 0.333 \ldots = 33.\bar{3}\,\% = 33\frac{1}{3}\,\%.$$

Les pourcentages

Applications des pourcentages

L'utilisation des pourcentages est banale. Trois des types les plus communes utilisations sont illustrées dans les trois prochains exemples.

Calculer le pourcentage d'un nombre

Les Cissé ont acheté une maison à \$175,000. Si on leur demande 15% comme apport personnel, combien d'argent mettront-ils sur la table ?

Solution I

(En utilisant une équation) L'apport personnel est 15% du prix de la maison. Ainsi, si *d* est pris comme apport personnel,

$$\begin{aligned} d &= 15\% \times \$175{,}000 \\ &= 0.15 \times \$175{,}000 \\ &= \$26{,}250 \end{aligned}$$

Solution II

(En utilisant le rapport et la proportion) le rapport 23 pour le nombre de questions sur le test doit être le même rapport que 92%. Ainsi,

$$\frac{23}{n} = \frac{92}{100} = 0.92.$$

ainsi,

$$23 = 0.92 \times n$$

et

$$n = 23 \div 0.92 = 25$$

comme avant.

Calculer quel est le pourcentage d'un nombre pour un autre.

Tara a obtenu 28 sur 35 points possibles sur son dernier test de maths. Quels pourcentages de points le professeur a-t-il écrit dans son carnet de notes pour Tara ?

Solution I

(En utilisant la définition) Tara a eu 28 pour 35 du test. Puisque

$$\frac{28}{35} = 0.80 = 80\%$$

La note sera 80% dans son carnet de notes.

Les pourcentages

Solution II

Soit x le pourcentage recherché, puis

$$\frac{x}{100} = \frac{28}{35}$$

et

$$x = \frac{28 \cdot 100}{35} = 80\%.$$

Intérêt Composé

Si vous mettez de l'argent dans un compte d'épargne bancaire, la banque vous paye des intérêts à un taux fixe (pourcentage) pour avoir eu le privilège d'utiliser votre argent. Par exemple, supposons que vous investissez \$5000 pendant une année au taux de 7%. Combien d'argent votre investissement vous rapportera-t-il à la fin de l'année ?
Puisque le taux d'intérêt est 7% de \$5000, l'intérêt gagné est :

$$\begin{aligned} 7\% \times \$5000 &= 0.07 \times \$5000 \\ &= \$5000 \cdot (1.07) \\ &= \$5350. \end{aligned}$$

En laissant ce montant dans le compte, sa valeur à la fin de la seconde année sera de:

$$\begin{aligned} \$5350 + 0.07 \times \$5350 &= \$5350 \cdot (1.07) \\ &= \$5000 \cdot (1.07)(1.07) \\ &= \$5000 \cdot (1.07)^2 \\ &= \$5724.50 \end{aligned}$$

L'intérêt généré au bout de la troisième année sera de:

$$\$5000 \cdot (1.07)^3 = \$6125.22$$

au centime près. En général, ce serait

$$\$5000 \cdot (1.07)^n$$

À la fin de n années. Ceci est un exemple de d'intérêt composé où le terme composé implique que chaque année, vous gagné un intérêt sur l'argent sur tout ce que vous avez déjà gagné les années précédentes de même que sur votre placement (le capital).
Habituellement, de nos jours, l'intérêt est composé plus qu'une fois par an. Supposez que l'investissement de \$5000 dont on vient juste de parler a été fait dans une banque payant un taux d'intérêt semi-annuel égal à 7%. Puisque le taux pendant une année est 7%, le taux pour la moitié par année est 3.5%. Ainsi, la valeur de l'investissement à la fin de l'année (c'est-à-dire, à la fin des deux périodes d'intérêt) est

$$\$5000(1.035)^2 = \$5356.13$$

et les valeurs à la fin des 2 ans et 3 ans respectivement sont :

$$\$5000(1.035)^4 = \$5737.62$$

et

$$\$5000(1.035)^6 = \$6146.28.$$

Les pourcentages

Composer de plus en plus est plus fréquemment présente avantage et, est aussi une manière pour les institutions financières d’attirer des clients. Quelques banques composent usent de plus en plus de cette pratique maintenant mensuellement, voire journalièrement. Les calculs ci-dessus sont typiques, et résument ce théorème.

Théorème

Composer l'intérêt Composé

La valeur d'un investissement de P dollars ou francs CFA à la fin de *n* si l’intérêt est payé au taux annuel de r % composé t fois dans l’année est

$$P\left(1+\frac{r/t}{100}\right)^{nt} .$$

Les pourcentages

Activités 1

***Écris chacun de ces rapports sous forme de pourcentage.**

1. a) $\frac{3}{16}$ b) $\frac{7}{25}$ c) $\frac{37}{40}$

2. a) $\frac{5}{6}$ b) $\frac{3.24}{8.91}$ c) $\frac{7.801}{23.015}$

3. a) $\frac{1.6}{7}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$

4. Écris chacun des décimaux ci-après sous forme de pourcentages.
   a) 0.19 b) 0.015 c) 2.15 d) 3

5. Écris chacun de ces pourcentages sous forme de fractions simplifiées.
   a) 10% b) 25% c) 62.5% d) 137.5%

6. Effectue chacun des calculs suivants.
   a) 70% b) 120% de 84 c) 38% de 751

7. Effectue chacun des calculs suivants.
   a) $7\frac{1}{2}$% de $20,000 b) .02% de 27,481 c) 1.05% de 845

8. Effecte mentalement chacune de ces opérations.
   a) 50% de 840 b) 10% de 2480
   c) 12.5% de 48 d) 125% de 24
   e) 200% de 56 f) 110% de 180

9. Convertis mentalement chacun de ces pourcentages.
   a) $\frac{7}{28}$ b) $\frac{11}{33}$ c) $\frac{72}{144}$ d) $\frac{44}{66}$

10. Estime mentalement le nombre manquant pour que les égalités ci-après soient vraies.
   a) 27% of ________ equals 16.
   b) 4 is ________ % of 7.5.
   c) 41% of 120 = ________.

Les pourcentages

Activités 2

1. Arrange les nombres suivants du plus petit au plus grand.

$$\frac{19}{25},\quad 0.\overline{7},\quad 77\%,\quad \text{and}\quad \frac{15}{19}$$

2. Dans une population donnée de femmes et d'hommes, 40% des hommes sont mariés et 30% des femmes sont mariés. Quel pourcentage de la population d'adulte est marié ?

3. Montre que le prix de vente d'objets soldé à 15 % est le même que 85 % du prix de vente.

4. Pendant la première moitié d'un match de basket, l'équipe de basket-ball au lycée a réussi 60% de leurs 40 tentatives. Pendant la deuxième moitié, elle a marqué sur seulement 25% de 44 tentatives. Au 1% près, quel était leur pourcentage de tir au but de pour le jeu entier ?

5. Quand on interroge au stratège d'une équipe de football mécontent pour avoir perdu un match sur sa performance, il affirme avoir donné 110% de son effort. Discutez brièvement le caractère raisonnable de cette affirmation.

Thème II : Les nombres réels : décimaux et pourcentages

Leçon 5 : Placer des nombres dans une perspective Notation scientifique

Le sais-tu ?

Qu'est un milliard de dollars ou que vaut un trillion de dollars ? Pour beaucoup de gens, ces nombres sont juste des mots – aussi grands soient-ils, ils ne pas signifier grand-chose. Mais on entend souvent parler de ce type de nombre tous les jours. Nous ne pouvons vraiment pas comprendre les questions principales de notre temps, nous semble-t-il, sans une approche des situations dans lesquelles ces nombres sont impliqués.
Dans cette unité, nous étudierons plusieurs techniques pour mettre de grands ou petits nombres dans une perspective qui leur donne une vraie signification.

Écriture des grands et petits nombres

Travailler avec de grands et petits nombres est beaucoup plus facile quand nous les écrivons dans un format spécial connu sous le nom de notation scientifique. Nous exprimons des nombres en ce format en écrivant un nombre entre 1 et 10 multipliés par une puissance 10. Par exemple, milliard est dix à la neuvième puissance, ou 10^9, ainsi nous écrivons 6 milliards dans la notation scientifique en tant que 6×10^9. De même, nous écrivons 420 dans la notation scientifique comme étant 4.2×10^2, et 0.67 en tant que 6.7×10^{-1}.

La notation scientifique

La notation scientifique est un format en lequel un nombre est exprimé comme un nombre entre 1 et 10 et multiplié par une puissance10. La notation scientifique facilite l'écriture des nombres qu'importe leur grandeur ou leur petitesse. Nous devons faire attention, cependant. Cette facilité ne doit pas nous induire en erreur. Par exemple, il est facile d'écrire le numéro 10^{80} que nous pourrions penser qu'il n'est pas aussi grand qu'on ne pense - mais, en fait c'est un nombre plus grand que tout le nombre d'atomes dans l'univers connu.

Placer des nombres dans une perspective

Notation scientifique

EXEMPLE 1 Les nombres en notation scientifique

Récris chacun des constats suivants en utilisant la notation scientifique.

a. Considère que la Banque Mondiale a environ $9, 100, 000, 000,000.
b. Le diamètre d'un noyau d'hydrogène mesure environ 0.000000000000001m.

Solution Note comme il est aisé de lire les nombres avec une notation scientifique.

a) La Banque Mondiale a environ $\$9.1 \text{ X } 10^{12}$, ou $9.1 trillion.
b) Le diamètre d'un noyau d'hydrogène mesure environ $1 \text{ X } 10^{-15}$ m.

Approximation de la notation scientifique

Un autre avantage de la notation scientifique est qu'il rend facile des approximations de réponses sans calculatrice. Par exemple, nous pouvons rapidement rapprocher les réponses de 5795 x 326 par 5795 à 6000 et 326 à 300 en les arrondissant. En écrivant les nombres arrondis dans la notation scientifique, nous retrouvons ce qui suit :

5795 X 326 est approximativement $(6 \text{ X } 10^3) \text{ X } (3 \text{ X } 10^2) = 18 \text{ X } 10^5 = 1,800,000$
Parce que la réponse est 1, 889,170, ces approximations donne une bonne estimation.

EXEMPLE 2 En cherchant des réponses par approximation

Un ami et vous faites un calcul arrondi sur la quantité de poubelles produite chaque jour par de nouveaux résidents de la ville. Vous estimez qu'en moyenne, chacun des 8 millions de résidents produit 1.8 livre, ou 0.0009 tonne, d'ordures chaque jour. Ainsi, la quantité totale d'ordures est

$$8,000,000 \text{ personne X } 0.0009 \frac{\text{tonne}}{\text{Personne}}$$

Votre ami appuie sur la touché de la calculatrice et vous dit que la réponse est 225 tonnes. Sans vous servir de la calculatrice, détermine si cette réponse est correcte.

Solution Vous pouvez écrire 8 millions comme $8 \text{ X } 10^6$, qui est proche 10. Vous pouvez écrire 0.0009 comme $9 \text{ X } 10^{-3}$, qui est proche de 10. Ainsi, le produit doit être approximativement

$$10^7 \text{ X } 10^{-3} = 10^{7-3} = 10^4 = 10,000$$

Clearly, your friend's answer of 225 tons is too small. This simple approximation technique provides a useful check, even though it did not tell us the exact answer.

Placer des nombres dans une perspective

Notation scientifique

Notation scientifique – Opérations

Pour convertir un nombre d'une notation ordinaire à celle scientifique.
Step 1. Déplace le point décimal après le premier chiffre autre que zéro.
Step 2. Pour la puissance de 10, employez le nombre de rangs que la virgule décimale se déplace; la puissance est positive si la virgule décimale se déplace à la gauche et négative si elle se déplace vers la droite.

Exemples:
3042 → 3.042×10^3 décimal se déplace de 3 rangs vers la gauche.

0.00012 → 1.2×10^{-4} décimal se déplace de 4 rangs vers la droite.

226×10^2 → $(2.26 \times 10^{2)} \times 10^2 = 2.26 \times 10^4$ décimal se déplace de 2 rangs vers la droite.

Convertir de la notation scientifique

Pour convertir un nombre de la notation scientifique à la notation ordinaire :

Étape 1. La puissance de 10 indique de combien de rangs il faut déplacer la virgule décimale ; déplacez-la vers la droite si la puissance de 10 est positive et vers la gauche si elle est négative.
Étape 2. Si déplacer la virgule décimale crée des rangs ouverts, remplissez-les avec des zéros.

Exemples :
4.01×10^2 → 401 Déplace Move le décimal de 2 rangs vers la droite.

3.6×10^6 → 3, 600,000 Déplace le décimal de 6 rangs vers la droite.

5.7×10^{-3} → 0.0057 Déplace le décimal de 3 rangs vers la gauche.

Multiplying or Dividing with Scientific Notation

La multiplication ou la division des nombres dans la notation scientifique équivaut à travailler simplement sur les puissances de 10 et les autres parties du nombre séparément.
Exemples :

$$
\begin{aligned}
(6 \times 10^2) \times (4 \times 10^5) &= (6 \times 4) \times (10^2 \times 10^5) \\
&= 24 \times 10^7 \\
&= 2.4 \times 10^8
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{4.2 \times 10^{-2}}{8.4 \times 10^{-5}} &= \frac{4.2}{8.4} \times \frac{10^{-2}}{10^{-5}} \\
&= 0.5 \times 10^{-2-(-5)} \\
&= 0.5 \times 10^3 \\
&= 5 \times 10^2
\end{aligned}
$$

Placer des nombres en perspective

Notation scientifique

Notez que, dans les deux exemples, nous avons trouvé la première fois une réponse dans laquelle le nombre multiplié par une puissance de 10 n'était pas entre 1 et 10. Nous suivrons le même procédé pour convertir la réponse finale en notation scientifique.

Addition et soustraction avec la notation scientifique
En général, nous devons écrire les nombres dans la notation ordinaire avant d'additionner ou de soustraire.

Exemples :
$(3 \text{ x } 10^6) + (5 \text{ X } 10^2) = 3,000{,}000 + 500$
$= 3,000{,}500$
$= 3.0005 \text{ X } 10^6$

$(4.6 \text{ X } 10^9) – (5 \text{ X } 10^8) = 4,600,000{,}000 – 500,000{,}000$
$= 4,100,000{,}000$
$= 4.1 \text{ X } 10^9$

Nous savons que les deux nombres ont la même puissance de 10, nous pouvons factoriser d'abord hors de la puissance de 10.

Exemples:
$(7 \text{ X } 10^{10}) + (4 \text{ X } 10^{10}) = (7 + 4) \text{ X } 10^{10}$
$= 11 \text{ X } 10^{10}$
$= 1.1 \text{ X } 10^{11}$

$(2.3 \text{ X } 10^{-22}) – (1.6 \text{ X } 10^{-22}) = (2.3 – 1.6) \text{ X } 10^{-22}$
$= 0.7 \text{ X } 10^{-22}$
$= 0.7 \text{ X } 10^{-23}$

En plaçant les nombres dans une perspective par comparaison
Une deuxième manière générale de mettre des nombres dans une perspective est celle de comparer. Par exemple, considérez 100 milliards de dollars, qui constituent la fortune de certains individus les plus riches du monde. Il est facile de dire un nombre comme 100 milliards, mais qu'est-ce qui fait sa grandeur ? Pensons à ce nombre en termes de compte. Supposez que vous avez été invité à compter $100 milliards en coupures d'un dollar. Combien de temps prendrait-il ? Clairement, si nous supposons vous pouvez compter 1 bille par seconde, il prendrait 100 milliards de secondes. Nous pouvons mettre 100 milliards (de 10^{11}) secondes en perspective en convertissant en années, en utilisant une chaîne de conversions :

Nous voyons que 100 milliards de secondes est équivalente à 3171 ans. En d'autres termes, vous auriez besoin de plus de trois mille ans justes pour compter $100 milliards en coupure d'un dollar. Et cela suppose que vous ne prendrez jamais de pause : que vous ne dormirez pas, ne mangerez ni ne boirez pas.

Placer des nombres dans une perspective

Notation scientifique

Activités 1

1. Convertis chacun des nombres suivants de la notation scientifique à celle ordinaire. Écris leur nom. *Exemple:* $2 \times 10^3 = 2000 =$ deux mille.
   a. 3×10^3 b. 6×10^6
   c. 3.4×10^5 d. 2×10^{-2}
   e. 2.1×10^{-4} f. 4×10^{-5}

2. Convertis chacun des nombres suivants de la notation scientifique à celle ordinaire. Écris leur nom.
   a. 8×10^2 b. 5×10^3 c. 9.6×10^4 d. 2×10^{-3}
   e. 3.3×10^{-5} f. 7.66×10^{-2}

3. Écris chacun des nombres suivants en notation scientifique.
   a. 233 b. 123,547 c. 0.11 d. 9736.23
   e. 124.58 f. 0.8642

4. Écris chacun des nombres suivants en notation scientifique.
   a. 4327 b. 984.35 c. 0.0045 d. 624.87
   e. 0.1357 f. 98.180004

5. Effectue les opérations suivantes et montre votre travail clairement. Sois sûr d'exprimer tes réponses en notation scientifique. Tu peux arrondir tes réponses au décimal près (comme dans 3.2×10^5).
   a. $(3 \times 10^3) \times (2 \times 10^2)$ b. $(4 \times 10^2) \times (3 \times 10^8)$
   c. $(3 \times 10^3) + (2 \times 10^2)$ d. $(8 \times 10^{12}) \div (4 \times 10^4)$

6. Effectue les opérations suivantes et montre votre travail clairement. Sois sûr d'exprimer tes réponses en notation scientifique. Tu peux arrondir tes réponses au décimal près (comme dans 3.2×10^5).
   a. $(4 \times 10^7) \times (2 \times 10^8)$ b. $(3.2 \times 10^5) \times (2 \times 10^4)$
   c. $(4 \times 10^3) + (5 \times 10^2)$ d. $(9 \times 10^{13}) \div (3 \times 10^{10})$

Dans les problèmes 7 et 8, compare chaque pair de nombres. Par quel facteur diffèrent-ils ?

7. a. 10^{35}, 10^{26} b. 10^{17}, 10^{27} c. 1 billion, 1 million
   d.7 milliards, 7 mille e. 2×10^{-6}, 2×10^{-9} f. 6.1×10^{27}, 6.1×10^{29}

8. a. 250 millions,5 billion b. 9.3×10^2, 3.1×10^{-2} c. 10^{-8}, 2×10^{-13}
   d. 3.5×10^{-2}, 7×10^{-8} e. mille un f. 10^{12}, 10^{-9}

9. The diameter of a typical bacterium is about 0.000001 meter.

10. Un faisceau de lumière peut voyager le long d'un terrain de football à environ 30 nanosecondes. Exprimez votre réponse en secondes. (conseil : Rappelez-vous que le nano signifie un milliardième.)

Placer des nombres dans une perspective

Notation scientifique

Activités 2

Dans les problèmes 1-2 faites une évaluation de la réponse sans calculatrice, montrant votre méthode d'évaluation. Faites alors le calcul exact (avec une calculatrice au besoin), et décrivez à quel point votre technique d'approximation marche.

1. a. $300, 000 \times 100$ b. 5.1 million $\times$ 1.9 mille
   c. $4 \times 10^9 \div 2.1 \times 10^6$ d. 33 million $\times$ 3.1 mille
   e. $4{,}288{,}364 \div 2132$ f. $(6.129845 \times 10^6) \div (2.198 \times 10^4)$

2. a. 5.6 billion $\div$ 200 b. 4 trillion $\div$ 260 millions
   c. $9000 \times 54{,}986$ d. 3 billion $\times$ 25,000
   e. $5987 \div 341$ f. $43 \div 765$

Décidez si chacune des marques suivantes de rapports a du sens (ou est clairement vrai) ou n'a pas de sens (ou est clairement faux). Expliquez votre raisonnement.

3. Je lis un livre qui a 10^5 de mots.

4. J'ai vu à peu près 10^{50} de publicités à la télé.

5. La fin d'une récente rencontre de football dans un grand stadium, le joueur star a signé des autographes pour chaque personne ayant assiste au match.

Thème: IV

Thème IV : Logique et raisonnement mathématique

Leçon 1 : Les propositions

Le sais-tu ?

Les règles de la logique donnent la signification précise aux déclarations mathématiques. Ces règles sont employées pour faire la distinction entre raisonnement mathématique valable et non valable. Puisqu'un des buts principaux de ce thème est d'enseigner au lecteur comment comprendre et comment faire un raisonnement mathématique, nous commençons notre étude de ce thème par une introduction à la logique.

En plus de son importance dans la compréhension du raisonnement mathématique, la logique a nombre d'emplois dans beaucoup d'autres manières. Ces règles sont employées dans la conception des circuits d'ordinateur, la construction de logiciels, la vérification de l'exactitude des arguments dans des secteurs légaux, et dans beaucoup d'autres cas de figure.

Les propositions

Nous commençons ce thème par une introduction aux blocs fonctionnels de base des propositions de logique. Une **proposition** est un rapport qui peut être vrai ou faux, mais pas les deux à la fois.

Exemple 1

Toutes les déclarations suivantes sont des propositions.
1. Washington, D.C., est la capitale des États-Unis d'Amérique.
2. Paris est la capitale de la France.
3. $1 + 1 = 2$.
4. $2 + 2 = 3$.

Les propositions 1, 2, et 3 sont vraies, alors que la 4^{e} est fausse.
Certaines phrases qui ne sont pas des propositions se trouvent dans l'exemple suivant :

Example 2

Soient les phrases suivantes.
1. Quelle heure est-il ?
2. Lis attentivement ceci.
3. $x + 1 = 2$.
4. $x + y = z$.

Les phrases 1 et 2 ne sont pas des propositions parce qu'elles ne sont pas des déclarations. Les phrases 3 et 4 ne sont pas des propositions parce qu'elles ne sont ni vraies ni fausses, puisque les variables dans ces phrases ouvertes n'ont pas valeurs assignées.

Les propositions

Des lettres minuscules sont employées pour représenter les propositions. Les lettres conventionnelles utilisées pour désigner des propositions sont *p, q, r, s*.... Une proposition vraie, est représentée par T, si c'est une proposition fausse, elle est représentée par F.

Tournons maintenant notre attention aux méthodes pour produire de nouvelles propositions à partir de celles que nous avons déjà. Nombre de déclarations mathématiques sont construites en combinant une ou plusieurs propositions. Les propositions ainsi obtenues s'appellent des **propositions composées**. Elles sont formées de propositions existantes en utilisant les opérateurs logiques.

Définition 1 Sit p une proposition La déclaration

"Ce n'est pas que p."
est une autre proposition, appelée la négation de p. La négation de p est indiquée par le ¬p. La proposition ¬p est lue "n'est pas p."
Trouve la négation de la proposition : "Aujourd'hui c'est vendredi." "Aujourd'hui n'est pas vendredi."

Définition 2 Soient *p et q* deux propositions. La proposition "*p et q*," indiquées $p \wedge q$, est vraie quand *p et q* sont vrais et faux sinon. La proposition $p \wedge q$ s'appelle **conjonction** de p et de q.

Exemple 3

Trouve la conjonction des propositions p et q où p est la proposition "aujourd'hui est vendredi." Et q est la proposition "Il pleut aujourd'hui."

La solution la conjonction de ces propositions, $p \wedge q$, est la proposition "Aujourd'hui est vendredi et il pleut". Cette proposition est vraie un vendredi pluvieux et est fausse tout autre jour qui ne soit pas un vendredi pluvieux.

Définition 3 Soient p et q des propositions. La proposition *"p ou q*," indiquée par $p \vee q$, est la proposition qui est fausse quand p et q sont tous les deux fausses et sinon vraies. La proposition $p \vee q$ s'appelle la **disjonction** de p et de q.

L'utilisation de la liaison **ou** dans une disjonction correspond à une des deux manières où le mot **ou** est souvent employé, à savoir, d'une manière incluse. Une disjonction est vraie quand les deux propositions qu'elle renferme sont soit vraies ou quand toutes les deux sont vraies. Par exemple, le **ou** inclusif est employé dans la déclaration suivante :

"Les étudiants qui ont pris le calcul ou la physique peuvent prendre ce cours."
Que signifie "les étudiants qui ont pris le calcul et la physique peuvent prendre ce cours", de même que les étudiants qui ont pris juste un des deux sujets ?

Les propositions

Logique

De même, quand le menu d'un restaurant déclare : "soupe ou salade est servie comme entrée," cela veut toujours dire que le client a le choix entre la soupe et la salade, mais pas les deux à la fois. D'où, la notion d'exclusivité, plutôt que d'inclusivité.

Exemple 5 Quelle est la disjonction de p et q, $p \vee q$, est-ce la proposition
"Aujourd'hui est vendredi, ou il pleut aujourd'hui".

Cette proposition est vraie tous les vendredis ou un jour pluvieux (y compris les vendredis pluvieux). Elle n'est fausse que tous les jours qui ne sont pas vendredi, tout jour non pluvieux.

Comme précédemment remarqué, l'utilisation de la liaison ou dans une disjonction correspond à une des deux manières où le terme **ou** est généralement employé, à savoir de manière incluse. Ainsi, une disjonction est vraie quand l'une des deux propositions qu'elle renferme est vraie ou quand toutes les deux sont vraies. Parfois, on emploie **ou** dans un sens exclusif. Quand l'exclusivité **ou** est employée pour relier les propositions p et q, la proposition "p ou q (mais pas tous les deux)" est obtenue. Cette proposition est vraie quand **p** est vrai et q est fausse, ou vice versa, et elle est fausse quand p et q sont fausses et quand toutes les deux sont vraies.

Définition 4 Soient p et q deux propositions. L'exclusivité **ou** de p et de q, indiqué par $p \oplus q$, est la proposition qui est vraie quand exactement l'une d'elles est vraie et est autrement fausse.

Définition 5 Soient p et q des propositions. **L'implication $\boldsymbol{p \to q}$** est la proposition qui est fausse quand p est vrai et q est vrai et faux autrement. Dans cette implication p s'appelle **l'hypothèse** et q s'appelle la **conclusion** (ou la conséquence).

Puisque les implications surgissent dans beaucoup d'endroits dans le raisonnement mathématique, une grande variété de terminologie est employée pour exprimer $\boldsymbol{p \to q}$. Quelques-unes des manières les plus communes d'exprimer cette implication sont :

- "si p, alors q"
- "p implique q"
- "si p, q"
- "p seulement si q"
- "p suffisant pour q"
- "q isi p"
- "q chaque fois que p"
- "q est nécessaire à p"

Notons que $p \to q$ est fausse seulement dans le cas où p est vraie mais que est fausse, ceci n'est vrai que quand p et q sont vraies, et quand p est fausse (la valeur de q importe peu).

Les propositions

La manière dont nous avons défini les implications est plus générale que la signification leur attachée dans le sens ordinaire. Par exemple, l'implication : "S'il fait beau aujourd'hui, nous irons alors à la plage." est une implication utilisée en langue normale, puisqu'il y a une relation entre l'hypothèse et la conclusion. De plus, cette implication est considérée comme valable à moins qu'il ne fasse beau et que nous n'allions pas à la plage.

Logique

Il y a quelques implications relatives qui peuvent être formées à partir de $p \to q$. La proposition
$q \to p$ est appelé contraire de $p \to q$.
$\sim p \to \sim q$ est appelé l'**inverse** of $p \to q$. La **contrapositive** de $p \to q$ est la proposition
$\sim q \to \sim p$.

Exemple 7 Trouve le contraire, l'inverse, et la contrapositive de l'implication

"Si aujourd'hui est jeudi, alors j'ai à test passer."

Solution

Le contraire est, "si j'ai un test aujourd'hui, alors on est jeudi.'
L'inverse est, "Si aujourd'hui n'est pas jeudi, alors je n'ai pas de test à passer."
La contrapositive de cette implication est, "Si je n'ai pas de test aujourd'hui, alors nous ne sommes pas jeudi."

Introduisons maintenant une autre manière de combiner les propositions.

Définition 6 Soient p et q deux propositions. La biconditionnelle $p \leftrightarrow q$ est la proposition qui est vraie quand p et q ont les mêmes valeurs de vérité et est fausse autrement.

Observe que la biconditionnelle $p \leftrightarrow q$ est vraie avec précision quand les implications $p \to q$ et $q \to p$ sont vraies. Pour cette raison, la terminologie
"p si et seulement si q" est employée pour cette biconditionnelle. D'autres manières communes d'exprimer la proposition $p \leftrightarrow q$ sont : "p est nécessaire et suffisante pour q" et "si p puis q, et réciproquement."

Opérations de logique et de bit

Les ordinateurs représentent l'information en utilisant les bits. Un bit a deux valeurs possibles, à savoir, 0 (zéro) et 1 (un). Le bit vient de l'élément binaire, puisque zéro et un sont les chiffres utilisés dans les représentations binaires des nombres. Un bit peut être employé pour représenter une valeur de vérité, puisqu'il y a deux valeurs de vérité, à savoir vrai et faux. Comme il est coutume de le faire, nous emploierons un 1 bit pour dire vrai et un 0 bits pour dire faux. C'est-à-dire, 1 représente T (vrai), 0 représente F (faux).

Les propositions

Les opérations de bit d'ordinateur correspondent aux liaisons logiques. En remplaçant vrai par un 1 et faux par un zéro dans les tables de vérité pour les opérateurs. Nous emploierons également la notation OU, ET, et XOR pour les opérateurs $\wedge, \vee,$ *and* $\oplus$.

L'information est souvent représentée en utilisant les chaînes binaires, qui sont des ordres de zéros et de uns. Quand ceci est fait, les opérations sur les chaînes binaires peuvent être employées pour manipuler cette information.

Définition 7 Une chaîne binaire est un ordre de zéros bit ou plus. La longueur de cette corde est le nombre de bits dans la chaîne.

La manière dont les opérations de bit sont définies est listée ci-après.

01 1011 0110	
<u>11 0001 1101</u>	
11 1011 1111	*niveau de bit OR*

01 1011 0110	
<u>11 0001 1101</u>	
01 0001 0100	*niveau de bit AND*

01 1011 0110	
<u>11 0001 1101</u>	
10 1010 1011	*niveau de bit XOR*

Les propositions

Activités 1

1. Lesquelles des phrases suivantes sont des propositions ? Quelles sont les valeurs de vérité ce celles qui sont des propositions ?
   (a) Dakar est la capitale du Sénégal. (b) $2 + 3 = 5$. (c) $5 + 7 = 10$.

2. Quelle est la négation de chacune des propositions suivantes ?
   (a) Aujourd'hui est jeudi.
   (b) $2 + 1 = 3$.
   (c) Pendant la saison des pluies il fait chaud et beau.

3. Soit p et q deux propositions
   p: J'ai acheté une voiture cette semaine.
   q: Je suis à la mosquée le vendredi.

   Transforme chacune des propositions suivantes sous forme de phrase régulière.
   (a) $\sim p$ (b) $p \vee q$ (c) $p \to q$ (d) $p \wedge q$

4. Soient p et q deux propositions
   p: C'est au-dessus de 30˚C.
   q: Il pleut.

   Écris les propositions suivantes en utilisant p et q et des liaisons logiques.
   (a) C'est au-dessus de 30˚C et il pleut.
   (b) C'est au-dessus de 30˚C mais il ne pleut pas.
   (c) C'est au-dessus de 30˚C et il ne pleut pas.

5. Soient p, q et r trois propositions
   p: Tu as obtenu un A à l'examen final.
   q: Tu as fait chaque activité dans ce livre.
   r: Tu as obtenu un A dans ce cours..

   Écris les propositions suivantes en utilisant p, q and r et des liaisons logiques.
   (a) Tu as obtenu un A à l'examen final, tu as fait chaque activité dans ce livre, et tu as eu un A dans ce cours.
   (b) Avoir eu un A à l'examen final et en faisant chaque activité dans ce livre est suffisant pour avoir un A dans ce cours. Tu auras un A dans ce cours si et seulement si tu fais soit chaque activité dans ce livre ou aies un A à l'examen final.

6. Détermine si chacune des implications suivantes est vraie ou fausse.
   (a) Si $1 + 1 = 2$, alors $2 + 2 = 5$.
   (b) Si $1 + 1 = 3$, alors $2 + 2 = 4$.
   (c) Si $1 + 1 = 3$, alors $2 + 2 + 5$.
   (d) Si $2 + 2 = 4$, alors $1 + 2 = 3$.

Les propositions

Activités 1

(Continued)

7. Pour chacune des phrases suivantes, détermine si une inclusion ou une exclusivité est prévue.
   (a) Être âgé de 18 ans ou la présence d'un parent serait nécessaire.
   (b) Le déjeuner comprend soupe ou salade.
   (c) Pour entrer dans le pays il te faut un passeport ou une carte d'identité.
8. Écris chacune des déclarations suivantes sous la forme "Si *p* puis *q*" d'une phrase. (*Suggestion :* réfère-toi à la liste des manières d'exprimer les implications citées plus haut).

   (a) Je t'enverrai l'adresse seulement si tu m'envoie un message email.
   (b) Pour avoir la nationalité de ce pays, il suffit d'être né aux États-Unis.
   (c) Si tu gardes ton livre, ce sera une bonne référence pour ton future cours.
9. Écris chacune des propositions suivantes sous la forme "*p* si et seulement si *q*" d'une phrase.
   (a) S'il fait chaud dehors tu achètes une crème glacée, et sit u achètes une crème glacée c'est qu'il fait chaud dehors.
   (b) Pour que tu remporte cette compétition il est nécessaire et suffisante que tu aies le seul ticket gagnant.
   (c) Tu seras promu seulement si tu as des relations, et tu as des relations seulement si tu es promu..
10. Écris chacune des propositions suivantes sous la forme "*p* si et seulement si *q*" d'une phrase.
   (a) Pour que tu aies A dans ce cours, il est nécessaire et suffisante que tu apprennes comment résoudre toutes les activités des problèmes.
   (b) Si tu lis les journaux chaque jours, tu seras informé et inversement.
   (c) Il pleut si c'est un jour de fin de semaine, et c'est un jour de fin de semaine s'il pleut.

Les propositions

Activités 2

1. Énonce le contraire, l'inverse, et la contrapositive de chacune des implications suivantes.
(a) S'il pleut aujourd'hui, je nagerai demain.
(b) Je viens en classe même s'il y a un examen.
c) Un nombre entier positif est premier seulement s'il n'a d'autres diviseurs que lui-même.

2. Énonce le contraire, l'inverse, et la contrapositive de chacune des implications suivantes.
(a) S'il neige ce soir, alors je resterai à la maison.
(b) Je vais à la plage toutes les fois que c'est un jour ensoleillé d'été.
(c) Quand je reste longtemps éveillé, il est nécessaire que je dorme jusqu'à midi.

3- Chaque habitant d'un village éloigné dit toujours la vérité ou ment toujours. Un villageois donnera seulement une réponse "oui" ou "Non" à une question qu'un touriste pose. Suppose que tu sois un touriste visitant ce secteur et que tu arrives à une fourche sur la route. Une branche mène aux ruines que vous voulez visiter ; l'autre branche mène profondément dans la jungle. Un villageois se trouve à la fourche. Quelle unique question peux-tu demander au villageois pour déterminer quelle branche vas-tu prendre ?

1. Trouve les niveaux de bit *OR, AND,* et *XOR* de chacune des paires de chaînes de bits suivantes.

   (a) 101 1110, 010 0001
   (b) 1111 0000, 1010 1010

2. Évalue chacune des expressions suivantes.
   (a) $1\ 1000 \wedge (0\ 1011 \vee 1\ 1011)$
   (b) $(0\ 1111 \wedge 1\ 0101) \vee 0\ 1000)$

Thème IV: Logique et raisonnement mathématique

Leçon 2: Les tables de vérité

Le sais-tu ?

Comme nous avons énoncé dans la leçon 1, une proposition est une déclaration qui est vraie ou fausse, mais pas tous deux à la fois. La valeur de vérité des déclarations se composant de plusieurs propositions, qui peuvent être très facilement déterminées par des tables de vérité. Dans cette leçon nous exposons les lecteurs aux tables de vérité. Nous commencerons par les tables de vérité de base et finirons par les plus complexes.

Une table de vérité montre les relations entre les valeurs de vérité des propositions. Elles sont d'une grande utilité dans la détermination des valeurs de vérité des propositions construites à partir de propositions plus simples. Le tableau 1 montre toutes les valeurs de vérité possibles d'une proposition et les valeurs de vérité correspondantes de sa négation.

La négation d'une proposition peut également être considérée le résultat de l'opération de **l'opérateur de négation** sur une proposition. L'opérateur de négation construit une nouvelle proposition d'une proposition simple existante.

TABLE 1 The Truth Table for the Negation of a Proposition

p	$\sim p$
T	**T**
F	**F**

C'est le plus simple des tables de vérité de base. Il illustre ce que chacune des tables de vérité montrera réellement : tous les vrais possibles (T), tous les faux (F) possibles avec les propositions à l'étude et les liaisons logiques à l'étude.
Nous présentons maintenant six (6) tables de vérité de base additionnelles.

La table 2 est la table de vérité pour la conjonction de deux propositions.
La table 3 est la table de vérité pour la disjonction de deux propositions.

TABLE 2 L**a table de vérité pour la conjonction de deux propositions.**

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

TABLE 3 **est la table de vérité pour la disjonction de deux propositions.**

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Les tables de vérité

La table 4 est la table de vérité de l'exclusivité de deux propositions.
La table 5 est la table de vérité pour l'implication de $p \rightarrow q$.

TABLE 4 **est la table de vérité de l'exclusivité de deux propositions.**	
p q	$p \oplus q$
T T	F
T F	T
F T	T
F F	F

TABLE 5 est **la table de vérité pour l'implication de $p \rightarrow q$.**	
p q	$p \rightarrow q$
T T	T
T F	F
F T	T
F F	T

Table 6 est la table de vérité pour la biconditionnelle $p \leftrightarrow q$.
Table 7 est la table pour les bits opérateurs OR, AND, et XOR.

TABLE 6 **est la table de vérité pour la biconditionnelle $p \leftrightarrow q$.**	
p q	$p \leftrightarrow q$
T T	F
T F	F
F T	F
F F	T

TABLE 7 **est la table pour les bits opérateurs OR, AND, et XOR.**				
x	y	$x \vee y$	$x \wedge y$	$x \oplus y$
0	0	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	0

On notera que les sept premières tables de vérité ont été données pour deux propositions seulement. Comment les tables de vérité changent-elles si on considère des propositions trois (3) ou plusieurs propositions simples ?

Observe d'abord soigneusement la table de vérité impliquant trois (3) propositions.

TABLE 8 Valeurs de vérité pour $p \wedge (q \vee r)$, impliquant (3) propositions.				
p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	T
T	F	T	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	F
F	T	F	T	F
F	F	T	T	F
F	F	F	F	F

Les tables de vérité

Notons que les tables impliquant deux propositions simples ont quatre rangées de valeurs de vérité et le tableau 8 qui implique trois propositions simples a huit rangées de valeurs de vérité. Combien de rangées des valeurs de vérité croyez-vous qu'une table impliquant quatre propositions simples différentes contiendrait-elle ? (conseil : 2 propositions, $2^2 = 4$ rangées ; 3 propositions, $3^2 = 8$ rangées ; n propositions, 2^n rangées.) Les tables de vérité sont d'une grande utilité pour nous aider non seulement à apprendre la valeur de vérité de déclarations composées, mais aussi à déterminer si deux déclarations composées sont **logiquement équivalentes** (ont des valeurs de vérité identiques). Les tables de vérité sont également d'une grande valeur pour déterminer si des propositions composées est une **contradiction** (toutes les valeurs de vérité sont F) d'une **tautologie** (toutes les valeurs de vérité sont T). Nous présentons maintenant des exemples de propositions de ce genre.

Table 9 illustre que $\sim p \vee q$ et $p \to q$ *sont* logiquement équivalentes.

Table 10 illustre que $p \vee (q \wedge r)$ et $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ sont logiquement équivalentes.

TABLE 9 **$\sim p \vee q$ et $p \to q$ sont logiquement équivalentes.**

p q	~p	~p ∨ q	p → q
T T	F	T	T
T F	F	F	F
F T	T	T	T
F F	T	T	T

TABLE 10 **$p \vee (q \wedge r)$ et $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ sont logiquement équivalentes.**

p q r	q ∧ r	p ∨ (q ∧ r)	p ∨ q	p ∨ r	(p ∨ q) ∧ (p ∨ r)
T T T	T	T	T	T	T
T T F	F	T	T	T	T
T F T	F	T	T	T	T
T F F	F	T	T	T	T
F T T	T	T	T	T	T
F T F	F	F	T	F	F
F F T	F	F	F	T	F
F F F	F	F	F	F	F

Les tables de vérité

Activités 1

1. Construis une table de vérité pour :

   (a) $p \wedge \sim p$ (b) $p \vee \sim p$

2. Construis une table de vérité pour :

   (a) $(p \vee \sim q) \to q$ (b) $(p \vee \sim q) \to (p \wedge q)$

3. Construis une table de vérité pour

   (a) $(p \to q) \to (q \to p)$ (b) $(p \to q) \leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$

4. Construis une table de vérité pour

   (a) $p \oplus \sim q$ (b) $\sim p \oplus \sim q$

5. Construis une table de vérité pour

   (a) $(p \oplus q) \vee (p \oplus \sim q)$ (b) $(p + q) \wedge (p \oplus \sim q)$

6. Construis une table de vérité pour

   (a) $(p \to q) \vee (\sim p \to q)$ (b) $(p \to q) \wedge (\sim p \to q)$

7. Construis une table de vérité pour

   (a) $\sim p \wedge \sim q$ (b) $\sim[p \vee (\sim p \wedge q)$

   Quel commentaire pourrais-tu faire au sujet de (a) et (b)?
8. Construis une table de vérité pour

   $[(\sim p \vee q) \wedge p] \to q$
9. Construis une table de vérité pour

   $(p \to q) \wedge (p \wedge \sim q)$
10. Compare et contraste les tables de vérité dans les problèmes 8 et 9.

    Quel est le nom spécial de chacune d’elles ? Dans les In problèmes 1 – 9, as-tu remarqué des propositions composées qui sont logiquement équivalentes, qui sont une tautologie ou une contradiction ? Si oui, identifie-les.

Les tables de vérité

Activités 2

1. Construis une table de vérité pour

   (a) $(p \vee q) \vee r$ (b) $(p \wedge q) \vee r$

2. Construis une table de vérité pour
   (a) $(p \wedge q) \wedge r$ (b) $(p \wedge q) \wedge r$

3. Construis une table de vérité pour
   $[\sim p \wedge (p \vee q)] \rightarrow q$
   Quel est le nom spécial de cette déclaration composée ?

4- Évalue l'expression suivante:
$(01111 \wedge 10101) \vee 010000$

5- Évalue
$(01010 \oplus 11011) \oplus 01000$

Thème IV : Logique et raisonnement mathématique

Leçon 3 : Déclaration ouverte, quantificateurs et déclarations quantifiées

Do You Know?

Des déclarations impliquant des variables telles que “$x > 5$, $x=y + 7$ et $x+ y = n$ sont fréquemment trouvés dans des discussions et raisonnements mathématiques. Ces déclarations ne sont ni vraies ni fausses quand les valeurs des variables ne sont pas indiquées. Ils y a des déclarations conditionnelles qui deviennent seulement des propositions quand les valeurs des variables sont indiquées. Celles-ci sont souvent écrites avec soit la variable x, comme p(x).

Exemple p(x): $x> 5$

Déclarations quantifiées sont les rapports impliquant des variables dont on connaît les valeurs des variables et dont on peut évaluer si les déclarations sont vraies ou fausses.

Example x(x): $x> 2$ est impair, où x est un nombre premier.

Une fois que les déclarations conditionnelles avec des variables deviennent des déclarations mesurées où la ou les valeur(s) de la variable est connue, elles deviennent des propositions et peuvent être évaluées comme vraies ou fausses. Pour écrire des déclarations ouvertes, nous employons souvent des quantificateurs. Dans cette leçon nous aborderons deux types de quantificateurs : universel et existentiel.

Les quantificateurs universels

Les mots, tout, chaque, et chacun s'appellent les quantificateurs universels. Quand ces mots sont ajoutés aux phrases ouvertes, ils les changent en déclarations qui deviennent vraies ou fausses. Des déclarations ouvertes impliquant des quantificateurs s'appellent des déclarations mesurées.

Voici des exemples de déclarations quantifiées.

Tous les homes des cheveux sur leurs têtes
Chaque camion utilise du diesel.
Pour chaque nombre réel x, $x+ 7 = 7 +x$.

Déclaration ouverte, quantificateurs et déclarations quantifiées

Les déclarations écrites avec des quantificateurs universels ont la propriété de pouvoir être écrites habituellement comme une implication (rapport conditionnel).

Si une personne est un homme, alors il a des cheveux sur sa tête.
Si un véhicule est un camion, alors il emploie le carburant diesel.
Si un nombre est réel, alors $x + 7 = 7 + x$.

Quantificateurs existentiels

Il y a d'autres déclarations mesurées permettant d'indiquer l'existence d'au moins un cas dans laquelle la déclaration est vraie. De telles déclarations impliquent généralement un des qualificateurs existentiels suivants : certains, il existe ou il existe au moins un.

Exemples

Certains hommes n'ont aucun cheveu sur leurs têtes.
Il existe des étudiants qui étudient trop.
Il existe au moins un étudiant qui ne va pas à l'école régulièrement.

Négation de déclarations quantifiées

Pour être la négation d'une déclaration mesurée, la déclaration nouvellement formulée doit avoir des valeurs de vérité qui sont l'opposé des valeurs de vérité de la déclaration initiale dans chaque situation possible.

Déclarations	**Négation**
Tous les *p* sont des *q*.	Quelques *p* ne sont pas *q*.
Quelques *p* sont des *q*.	Aucun *p* est *q*. Tous les *p* ne sont pas *q*.
Certains *p* ne sont pas *q*.	Tous les *p* sont des *q*.
Aucun *p n'est q*.	Quelques *p* sont des q.

Exemple

Écris la négation de chaque déclaration.

(a) Quelques filles ont des cheveux rouges. (Au moins une fille a des cheveux rouges)
(b) Toutes les pommes sont jaunes.
(c) Aucun médecin n'est chauve.
(d) Quelques pêcheurs ne travaillent pas dur.(au moins un pêcheur ne travaille pas dur.)

Solution :

(a) "Aucune fille n'a des cheveux rouges" or "Toutes les filles ont des cheveux rouges."
b) Quelques pommes ne sont pas jaunes.
(c) Quelques médecins sont chauves. (au moins un médecin est chauve.)
(d) Tous les pêcheurs travaillent dur.

Déclaration ouverte, quantificateurs et déclarations quantifiées

Contre- exemple

Pour prouver qu'une déclaration universellement mesuré est fausse, on a seulement besoin de trouver un cas pour lequel la déclaration est fausse ; c'est-à-dire, qu'on a seulement besoin d'identifier un contre-exemple. Cependant, pour prouver qu'une déclaration mesurée de type existentielle est fausse, on doit prouver qu'elle est fausse pour toutes les possibilités. De même, une déclaration mesurée de type existentielle est vrai si on peut trouver un cas pour lequel il est vrai, mais une déclaration mesurée universellement est vraie seulement si elle est vraie pour tous les cas.
Soit $P(x)$ une phrase ouverte. Puis, symboliquement, le **quantificateur universel** est représenté par $\forall \boldsymbol{x}$ et le quantificateur existentiel est quant à lui représenté par $\exists \boldsymbol{x}$.

Exemple

Soit P(x): "*x >3.*"	une phrase ouverte
$\forall x$ (pour chaque *x*)	quantificateur universel
$\exists x$ (il existe *x*)	quantificateur existentiel
$\forall x\, P(x)$	déclaration universelle mesurée
$\exists x\, P(x)$	déclaration existentielle mesurée

En utilisant les symboles et les notations, nous pouvons récapituler ce que nous avons dit sur les déclarations mesurées et leur négation.

TABLE 1 **Quantificateurs**

Déclaration mesurée	Quand est-elle vraie ?	Quand est-elle fausse ?
$\forall x\, P(x)$ $\exists x\, P(x)$	$P(x)$ est vraie pour chaque x. Il y a un x pour lequel $P(x)$ est vraie.	Il y a un x pour lequel $P(x)$ est fausse. $P(x)$ est pour chaque x.

TABLE 1 **Quantificateurs de négation**

Quantificateur de négation	Déclaration équivalente	Quand la négation est-elle vraie ?	Quand est-elle fausse ?
$\sim\exists x\, P(x)$ $\sim\forall x\, P(x)$	$\forall x \sim P(x)$ $\exists x \sim P(x)$	$P(x)$ est fausse pour chaque x. Il y a un x pour lequel P(x) est fausse.	Il y a un x pour lequel $P(x)$ est vraie. $P(x)$ est vraie pour chaque x.

Déclaration ouverte, quantificateurs et déclarations quantifiées

Activités 1

1. Soit P(x) une phrase ouverte “$x \leq 7$”
   Quelle est la valeur de vérité des déclarations suivantes ?
   (a) P(-7) (b) P(0) (c) P(7) (d) P(14)

*** P(x): “x passé plus de 7 heures en classe chaque semaine (où x est un étudiant).”**

2. En utilisant P(x) dans (*), exprime sous la forme d’une déclaration mesurée ce qui suit.
   (a) $\exists x\ P(x)$ (b) $\forall x\ P(x)$

3. En utilisant P(x) dans *, exprime sous la forme d’une déclaration mesurée ce qui suit.
   (a) $\exists x \sim P(x)$ (b) $\forall x \sim P(x)$

4. Récris les déclarations mesurées suivantes en utilisant les symboles $\exists$ et $\forall$.
   (a) Pour tout x, $x^2 = 64$. (b) Pour quelques x, $x^2 = 64$.

**** (a) P(x): x est un nombre entier (c) P(x): x est un nombre irrationnel**
(b) P(x): x est un nombre réel (d) P(x): x n’est pas un nombre rationnel.

5. Écris chaque phrase ouverte dans ** sous la forme d’une déclaration universelle mesurée, en utilisant le symbole $\exists$ ou $\forall$.

6. Écris chaque phrase ouverte dans ** sous la forme d’une déclaration existentielle mesurée en utilisant le symbole $\exists$ ou $\forall$.

7. Récris la déclaration mesurée suivante en utilisant les symboles $\exists$ et $\forall$.
   (**Conseil**: Premièrement, écris correctement la P(x) sous la forme d’une déclaration ouverte)
   (a) Pour quelques triangles, la somme des mesures des angles intérieurs est égale à 180˚.
   (b) Pour tous les triangles, la somme des mesures des angles intérieurs est égale à 180˚.

8. Pour chaque phrase ouverte, affecte une valeur à x qui fasse de la phrase ouverte une déclaration vraie.
   (a) $x + 4 = 7$ (c) $x^2 = 16$
   (b) $x - 7 = 4$ (d) $x + 3 = 3 + x$

9. Utilise un quantificateur pour faire de chaque phrase ouverte dans le problème 8 une déclaration vraie.

10. Utilise un quantificateur pour faire de chaque phrase ouverte dans le problème 8 une déclaration fausse.

Déclaration ouverte, quantificateurs et déclarations quantifiées

Activités 2

1. La notation $\exists ! \, x \, P(x)$ indique la proposition

   "Il existe un x unique tel que P(x) soit vraie."

   Quelles sont les valeurs de vérité des déclarations suivantes ? (où x est un entier)

   (a) $\exists ! \, x(x > 1)$
   (b) $\exists ! \, x(x^2 = 1)$
   (c) $\exists ! \, x(x + 3 = 2x)$
   (d) $\exists ! \, x(x = x + 1)$
2. Quelles sont les valeurs de vérité des déclarations suivantes ? (où x est un entier

   (a) $\exists ! \, x \, P(x) \rightarrow \exists \, x \, P(x)$
   (b) $\forall x \, P(x) \rightarrow \exists ! \, x \, P(x)$
   (c) $\exists ! \, X \sim P(x) \rightarrow \sim\forall \, x \, P(x)$

3. Écris la déclaration mesurée $\exists ! \, x \, P(x)$, où x est un entier 1, 2, et3.

4. Écris la négation de chaque déclaration sans utiliser l'expression "Ce n'est pas vrai que."
   (a) Tous les athlètes mesurant plus 6 feet jouent au basketball.
   (b) Quelques étudiants travaillent dur à l'école.
   (c) Quelques professeurs ne sont pas intelligents.
   (d) Aucun homme ne pèse plus de 500 pounds.

5. Écris chacune des expressions du problème 4 en utilisant les symboles $\exists$ et $\forall$.

Thème IV: Logique et raisonnement mathématique

Leçon 4: Raisonnement déductif

Le sais-tu ?

Arguments valables

Soient les deux ensembles de déclarations suivantes.

Argument A:

Si Salam étudie, alors il obtiendra un A.
Si Salam obtient A, alors il figurera sur la liste du doyen.
Salam étudie.

Argument B:

S'il y a un chemin reliant chaque paire de sommets dans un graphique, alors le graphique est relié. Dans le graph G il y a un chemin reliant chaque paire de sommets.
Peux-tu donner une conclusion découlant des déclarations de l'argument A ? As-tu choisi la déclaration "Salam figure sur la liste du doyen" ? Peux-tu déduire la conclusion découlant de l'argument B ? Es-tu arrivé à la conclusion suivante : "Le graph G est relié" ? Si oui, alors ton raisonnement est juste. Ce faisant, tu as en plus démontré une compétence relative aux deux modèles classiques du raisonnement qui sont à la base du raisonnement déductif.

Soient les déclarations suivantes.

Si Salam étudie, alors il obtiendra un A.
Si Salam obtient un A, alors il figurera sur la liste du doyen.
Salam étudie.
****
Donc, Salam figure sur la liste du doyen.
C'est un exemple d'un argument déductif. Dans les mathématiques et dans la vie de tous les jours, des situations de ce genre se présentent à nous, situations dans lesquelles nous sommes conduits à faire des déductions pour tirer la conclusion appropriée d'un ensemble de déclarations données. Un argument se compose généralement de deux parties : un ensemble de deux ou de plusieurs déclarations a appelées **prémisses** et d'une déclaration simple appelée **conclusion.** Un argument est valable si la conclusion est vraie dans chaque circonstance dans laquelle la conjonction des prémisses est vraie. Si, dans certain cas, la conjonction des prémisses est vraie et la conclusion fausse, alors l'argument n'est pas valable. Des arguments non valables s'appellent parfois les erreurs. Notons qu'un argument valable peut avoir une conclusion fausse si l'une des prémisses ne s'avère pas vraie.

Raisonnement déductif

Les arguments sont souvent symboliquement représentés par la nomination de la déclaration qui forme l'argument :

S'il y a l'inflation, alors le prix des automobiles augmente $p \to q$
Il y a inflation. p
****
Dons, le prix des automobiles augmente. $\therefore q$

Les trois points $\therefore$ sont lus donc.

Quand des arguments verbaux sont convertis sous la forme de symbole, on constate que les mêmes modèles se produisent le plus souvent. Par exemple, le modèle dans le paragraphe précédent se produit fréquemment.

$(p \to q) \wedge p;\ \therefore q$ or $[(\mathrm{p} \to \mathrm{q}] \wedge p] \to q$ is a tautology.

Le fait crucial au sujet d'un argument valable est que la vérité de sa conclusion suit logiquement celle de ses prémisses. Il est impossible d'avoir un argument valable avec des prémisses vraies et une conclusion fausse. Quand un argument est valable et ses prémisses vrais, la vérité de la conclusion découle de celle des prémisses. Si une conclusion n'est pas vraie, alors la déduction n'est pas valable.

Il y a quatre (4) règles de déduction (inférence) de base utilisées dans des déclarations impliquant des quantificateurs où des arguments valables sont impliqués, déduits, ou construits. Ces règles d'inférence sont employées intensivement dans des arguments mathématiques et le raisonnement déductif, sans être parfois explicitement mentionnée.

L'instanciation universelle est la règle de l'inférence employée pour conclure que P(c) est vrai, où c est un membre particulier de l'univers du discours, donnant la prémisse xP(x). L'instanciation universelle est employée quand on conclut d'une déclaration "que toutes les femmes sont sages" que "Lisa est sage", où Lisa est un membre de l'univers du discours de toutes les femmes.

La généralisation universelle est la règle de l'inférence qui déclare que le xP(x) est vrai, donnant la prémisse que P(c) est vrai pour tous les éléments c dans l'univers du discours. La généralisation universelle est employée quand on prouve que le xP(x) est vrai en prenant un élément arbitraire c de l'univers du discours et en prouvant que P(c) est vraie. L'élément c que l'on choisit doit être un élément arbitraire, et non spécifique, un élément de l'univers du discours. La généralisation universelle est employée implicitement dans beaucoup de preuves en mathématiques mais rarement mentionnée explicitement.

L'instanciation existentielle est la règle qui nous permet de conclure qu'il y a un élément c dans l'univers du discours pour lequel P(c) est vrai si nous savons que le xP(x) est vrai. Nous ne pouvons pas choisir une valeur arbitraire de c ici, mais plutôt ce doit être un c pour lequel P(c) est vrai. Habituellement nous n'avons aucune connaissance de ce qu'est c, nous savons seulement qu'il existe. Puisqu'il existe, nous pouvons l'appeler (c) et continuer notre argument.

Raisonnement déductif

La généralisation existentielle est la règle de l'inférence qui est employée pour conclure que le xP(x) est vrai quand un élément particulier c avec P(c) vrai est connu. C'est-à-dire, si nous connaissons un élément c dans l'univers du discours pour lequel P(c) est vrai, alors nous savons que le xP(x) est vrai.

Nous récapitulons ces règles d'inférence dans le Tableau A

TABLE A **Règles de l'inférence pour les déclarations quantifiées.** ***U* est l'univers du discours, où *x* appartient.**	
Règles de l'inférence	***Noms***
$\dfrac{\forall x P(x)}{\therefore P(c) c \in U}$	**Instanciation universelle**
$\dfrac{P(c)\mathbf{c} \in U}{\therefore \wedge x P(x)}$	**Généralisation universelle**
$\dfrac{\exists x P(x)}{\therefore P(c)\mathbf{c} \in \mathbf{U}}$	**Instanciation existentielle**
$\dfrac{P(c)\mathbf{c} \in \mathbf{U}}{\therefore \exists x P(x)}$	**Généralisation existentielle**

Une des utilisations fondamentales du raisonnement déductif dans les mathématiques est celle de prouver des théorèmes.

Ces règles d'inférence sont employées dans les mathématiques principalement pour prouver des propositions. Différentes méthodes de preuves sont employées dans la production des théorèmes.

Les méthodes de preuve

Deux questions importantes qui se posent dans l'étude des mathématiques sont :
(1) quand un argument mathématique est-il correct ?
(2) quelles méthodes peuvent être employées pour construire des arguments mathématiques ?
Cette section aide à répondre à ces questions en décrivant diverses formes d'arguments mathématiques corrects et incorrects.

Un théorème est une déclaration qui peut s'avérer vraie. (les théorèmes s'appellent parfois propositions, faits, ou résultats.) Nous démontrons qu'un théorème est vrai avec une suite de déclarations qui forment un argument, appelé **preuve**. Pour construire des preuves, des méthodes sont nécessaires pour en tirer de nouvelles déclarations des vieilles. Les déclarations utilisées dans une preuve peuvent inclure les axiomes ou les postulats, qui sont des suppositions sous-jacentes au sujet des structures mathématiques, **les hypothèses** du théorème à prouver, et des théorèmes précédemment prouvés. Les règles de l'inférence, qui sont les moyens utilisés pour tirer des conclusions d'autres affirmations, définissent ensemble les étapes d'une preuve.

Raisonnement déductif

Les termes lemme et le corollaire sont employés dans la preuve d'autres théorèmes. Un lemme est un théorème simple utilisé dans la preuve d'autres théorèmes. Un **lemme** est un résultat sur lequel s'appuie la démonstration d'un théorème plus important. Les preuves compliquées sont habituellement plus faciles à comprendre quand elles sont prouvées en utilisant une série de lemmes, où chaque lemme est prouvé individuellement. **Un corollaire** est une proposition qui peut être établie à partir d'un théorème qui a été prouvé. Une **conjecture** est une déclaration dont la valeur de vérité est inconnue. Quand la preuve d'une conjecture est trouvée, la conjecture devient un théorème. Le plus souvent plusieurs conjectures s'avèrent fausses, elles ne sont donc pas toujours des théorèmes.

Les méthodes de preuve discutées dans cette leçon sont importantes non seulement parce qu'elles sont employées pour prouver des théorèmes mathématiques, mais également pour leurs applications dans le raisonnement déductif dans des défis journaliers.

Nous finissons cette leçon en citant un certain nombre de genres de preuves différents en donnant des exemples. Encore une fois, la preuve des théorèmes est l'utilisation la plus importante du raisonnement déductif dans les mathématiques.

Les preuves directes

L'implication $p \rightarrow q$ peut être prouvée en démontrant que si p est vrai, alors q doit également être vrai. Ceci prouve que la combinaison p vraie et q faux ne se produit jamais. Une telle preuve s'appelle une **preuve directe**. Pour effectuer une telle preuve, suppose que p soit vrai et emploie les règles de l'inférence et des théorèmes déjà prouvés pour montrer que q doit également être vrai.

Exemple 1

Théorème "Si n est un nombre impair, alors n^2 est un nombre impair." (Donne la preuve directe.)

Solution

Suppose que l'hypothèse de cette implication est vraie, à savoir, supposez que n est impair. Puis n = 2k + 1, où k est un nombre entier. Il en découle ceci $N^2 = (2k + 1)2 = 4k2 + 4k + 1 = 2(k^2 + 2k) + 1$. Par conséquent, le N^2 est un nombre entier impair (il est un plus de deux fois un nombre entier).

Preuves indirectes

Puisque l'implication $p \rightarrow q$ est équivalente à sa contra-positive, le ~p de ~q, l'implication $p \rightarrow q$ peut être prouvé en montrant que son contra-positive, ~p de ~q, est vrai. Cette implication relative est habituellement montrée directement, mais n'importe quelle technique de preuve peut être employée. Un argument de ce type s'appelle une preuve indirecte.

Exemple 2

Théorème "Si $3n + 2$ est impair, alors n est impair." (Donne une preuve indirecte.)

Solution

Suppose que la conclusion de cette implication est fausse ; à savoir, suppose que n est pair. Puis n = 2k pour un nombre entier k. Il e découle que 3n + 2 = 3(2k) + 2 = 6k + 2 = 2(3k + 1), ainsi 3n + 2 est pair (puisque c'est un multiple de 2) et n'est donc pas impair. Puisque la négation de la conclusion de l'implication implique que l'hypothèse est fausse, l'implication originale est vraie.

Preuve par contradiction

La preuve par contradiction est une autre approche que nous pouvons utiliser quand ni une preuve directe ni indirecte ne réussit.

Suppose qu'une contradiction q puisse être trouvée de sorte que le $\sim p \to q$ soit vrai, cela est le $\sim p \to \mathbf{F}$ est vraie. Alors la proposition ~p doit être fausse. En conséquence, p doit être vrai. Cette technique peut être employée quand une contradiction, telle que $r \wedge \sim r$, puisse être trouvée de sorte qu'il soit possible de montrer que l'implication $\sim p \to (r \wedge \sim r)$ est vrai. Un argument de ce type s'appelle la **preuve par contradiction**.

Exemple 3

Théorème "Si 3n + 2 est impair, alors n est impair."

Solution

Nous supposons que 3n + 2 est impair et que n n'est pas impair, de sorte que n soit pair. Après les étapes semblables à celles de la preuve indirecte, nous pouvons prouver que si n est pair, alors 3n + 2 est pair. Ceci contredit la supposition que 3n + 2 est impair, accomplissant la preuve.

Il y a plusieurs autres méthodes de preuves, telles que :

- **Preuves par des cas** - une preuve d'une implication où l'hypothèse est une disjonction de propositions qui prouve que chaque hypothèse implique séparément la conclusion ;
- **Preuve vide** - une preuve que l'implication $p \to q$ est vraie basée sur le fait que p est faux

  Preuve insignifiante – une preuve que l'implication $p \to q$ est vraie base sur le fait que q est vrai.

et d'autres encore. Cependant, les trois (3) que nous avons données dans cette leçon, avec des exemples, sont les plus fréquemment utilisées.

Raisonnement déductif

Activités 1

Partie I: Vrai ou faux (Explique ta réponse.)

____ 1. Chaque proposition est un théorème.
____ 2. Un théorème est une proposition.
____ 3. Chaque théorème est un lemme.
____ 4. Chaque lemme est un théorème.
____ 5. Une éventualité est toujours fausse.
____ 6. Toutes les vraies valeurs d'une tautologie sont fausses.
____ 7. Toutes les vraies valeurs d'une contradiction sont vraies.
____ 8. Un faux raisonnement est une méthode de preuve.
____ 9. Un contre-exemple est une méthode de preuve.
____ 10. Il ya seulement trois manières de prouver un théorème (1) direct, (2) indirect, (3) par contradiction.

Partie II: Formule symboliquement les arguments des exercices 1 – 5, et détermine si chacun d'eux est valable. Soit

p: J'étudie sérieusement. *Q: J'ai obtenu des A partout.* *r: Je suis riche.*

1. Si j'étudie sérieusement, alors j'obtiendrai des A partout.
   J'étudie sérieusement.
   ∴ J'ai des A partout.

2. Si j'étudie sérieusement, alors j'obtiendrai des A partout.
   Si je ne suis pas riche, alors je n'aurai pas des A partout.
   ∴ Je suis riche.

3. Je travaille sérieusement si et seulement si je suis riche.
   Je suis riche.
   ∴ Je travaille sérieusement.

4. Je suis travaille sérieusement ou je suis riche, alors j'obtiendrai des A partout.
   J'ai obtenu des A partout.
   ∴ Si je n'étudie pas sérieusement, alors je suis riche.

5. Si j'étudie sérieusement, alors j'aurais des A partout ou je serai riche.
   Je n'ai pas obtenu de A partout et je ne suis pas riche.
   ∴ Je n'ai pas étudié sérieusement.

Raisonnement déductif

Activités 2

Démontre ces théorèmes par une preuve directe, indirecte ou par contradiction.

Théorème 1 Si x et y sont des entiers pairs, alors x + y est pair.

Théorème 2 Si x est un entier impair et y un entier pair, alors le produit xy est un entier pair.

Théorème 3 Si x est un entier impair et y un entier impair, alors x + y est un entier pair.

Théorème 4 Si x est un entier pair et y un entier impair, alors x + y est un entier impair.

Théorème 5 Pour chaque entier n, n^2 est pair, alors n est pair.

1. Prouve le théorème 1.

2. Prove theorem 2.

3. Prouve le théorème 3.

4. Prouve le théorème 4.

5. Prouve le théorème 5.

6. – 10.
   Crée tes propres problèmes ou théorèmes que tu voudrais bien résoudre.

Thème IV: Logique et raisonnement mathématique

Leçon 5: Le raisonnement inductif

Le sais-tu ?

Le raisonnement inductif est essentiellement l'opposé du raisonnement déductif. C'est d'essayer de créer des principes généraux en commençant par des exemples spécifiques. Par exemple, dans la géométrie inductive il est possible de mesurer les angles intérieurs d'un groupe de triangles quelconques. Quand on découvre que la somme de trois angles est égale 180 indépendamment du triangle, on serait tenté de faire une généralisation au sujet de la somme des angles intérieurs d'un triangle. La mise en relief de tous ces faits séparés fournit l'évidence afin de soutenir toute déclaration générale au sujet des angles intérieurs.

C'est le genre de raisonnement utilisé si on a une compréhension du fonctionnement de quelque chose. Plutôt que de commencer par des lois et des principes et de faire des déductions, la plupart des personnes rassemblent une expérience appropriée et essayent de construire des principes à partir d'elles.

Le raisonnement inductif va des observations de différents cas au développement d'une généralité. Voici quelques exemples généraux du raisonnement inductif :

Exemple 1

Une personne conduit à vitesse réduite sur une route particulière à l'heure de pointe plusieurs fois et trouve le trafic terrible chaque fois. Donc, c'est une route à éviter aux heures de pointe.

Exemple 2

Bien, j'ai remarqué que plusieurs patients reçoivent une certaine combinaison de médicaments, et on n'a jamais noté aucun problème avec. Par conséquent, cette combinaison de drogue semble n'avoir aucun effet secondaire négatif.

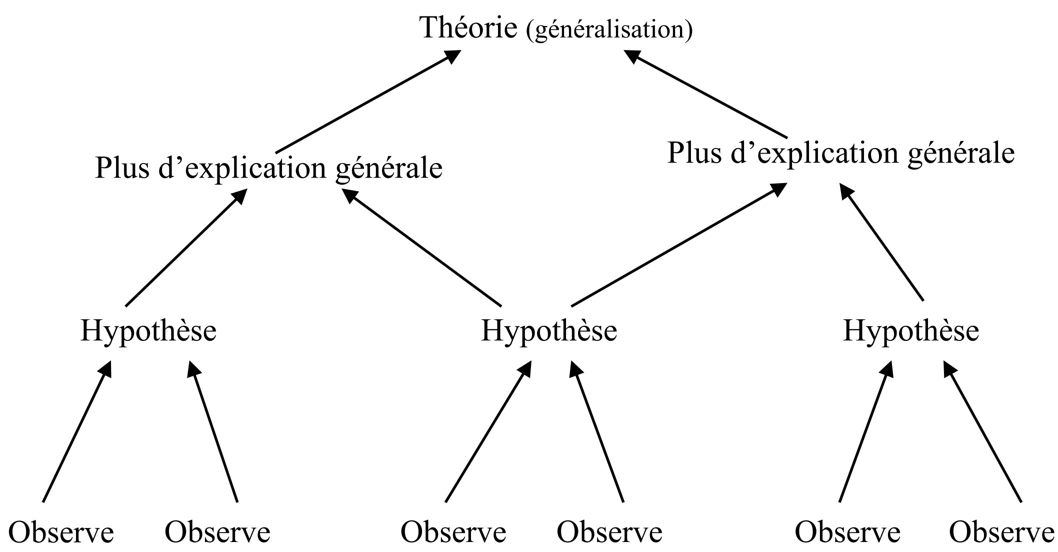
Les arguments inductifs sont toujours discutables comme, par définition, la conclusion est plus grande que l'évidence sur laquelle elle est basée. Le **raisonnement inductif** est le processus de l'arrivée à une conclusion basée sur un ensemble d'observations. En soi, ce n'est pas une méthode valable de preuve. En effet, ce n'est pas parce qu'une personne à observer un certain nombre de situations dans lesquelles l'existence d'un modèle ne signifie pas que le modèle est vrai pour toutes les situations.

Le raisonnement inductif

Par exemple, le raisonnement inductif est souvent employé dans la géométrie et d'autres secteurs des mathématiques. L'on pourrait observer que dans quelques rectangles donnés, les diagonales sont de la même taille. L'observateur pourrait de manière inductive déduire que dans tous les rectangles, les diagonales sont égales. Bien que nous sachions que pour cela soit généralement vrai, l'observateur n’a pas à prouvé que ses observations sont limitées. Cependant, il pourrait prouver son hypothèse en utilisant d'autres moyens et d’en tirer un théorème (un rapport prouvé). Dans ce cas-ci, comme dans beaucoup d'autres, le raisonnement inductif a mené à un soupçon, ou plus spécifiquement, une hypothèse, qui devient vraie à la fin. Cependant, dans tous ces cas de figure, l'hypothèse n'est pas vraie.

La puissance du raisonnement inductif, alors, ne se situe pas dans sa capacité de prouver des déclarations mathématiques. En fait, le raisonnement inductif ne peut jamais être employé pour fournir des preuves. En revanche, le raisonnement inductif présente un certain intérêt parce qu'il permet de nous faire des idées au sujet des groupes de choses dans la vraie vie. Dans la géométrie, le raisonnement inductif nous aide à organiser ce que nous observons dans des hypothèses géométriques succinctes que nous pouvons prouver en utilisant des méthodes plus fiables. Qu’on le sache ou pas, le processus du raisonnement inductif se fait presque toujours de même la manière que nous formons des idées au sujet des choses. Une fois que ces idées formées, nous pouvons systématiquement déterminer (en utilisant les preuves formelles) si nos idées initiales étaient exactes, fausses, ou entre les deux.

Le raisonnement inductif est la dernière étape du processus



Commence par des observations
Début du processus

Le raisonnement inductif

Bien que le raisonnement inductif ne soit pas une méthode de preuve, il y a deux idées liées au raisonnement inductif qui sont importantes aux mathématiques et à d'autres aspects de la réalité.

A. Ensembles inductivement définis (une technique de construction),

B. Le principe d'induction mathématique (qui est la base de la preuve mathématique par induction).

Ces deux idées aident à résoudre des problèmes réels.

Il y a habituellement deux (2) parts dans la résolution d'un problème. La première partie consiste à deviner ce qu'on croit pourrait être la solution. La deuxième partie doit vérifier que l'hypothèse est correcte ou non. Nous montrerons maintenant comment ces idées résolvent des problèmes ; spécialement mathématiques.

Des ensembles defines inductivement

Quand nous notons une déclaration informelle comme $A = \{3, 5, 7, 9...\}$, la plupart d'entre nous conviendra que nous voulons dire l'ensemble $A = \{2k + 3 \mid k \in \mathbf{N}$. Une autre manière de décrire A est d'observer que $3 \in A$, que $x \in A$ implique que $x + 2 \in A$, et la seule manière pour qu'un élément soit dans A est par ces deux étapes. Cette description de A a trois ingrédients :

Il y a un rapport qu'aucun autre élément n'est dans l'ensemble

1. Il y a un élément commençant (3).
2. Il y a une opération de construction pour établir de nouveaux éléments existants (addition par 2).
3. Il y a une déclaration qu'aucun un autre élément n'est pas dans l'ensemble.

Quelques définitions inductives

Ce processus dans un exemple d'une définition inductive d'un ensemble. L'ensemble d'objets définis s'appelle un ensemble inductif. Un **ensemble inductif** se compose des objets qui sont construits, d'une manière quelconque, des objets qui sont déjà dans l'ensemble. Aussi, rien ne peut être construit à moins qu'il y ait au moins un objet dans l'ensemble pour commencer le processus. Les ensembles inductifs sont importants en informatique parce que les objets peuvent être employés pour représenter l'information et les règles de construction peuvent souvent être programmées. Une définition formelle est comme suit :

Le raisonnement inductif

Une définition inductive de l'ensemble S se comprends trios (3) étapes :

Base: Spécifie un ou plusieurs éléments de S.

Induction: Donne une ou plusieurs règles pour construire de nouveaux éléments de S à partir d'éléments existants de S.

Clôture: démontre que S se compose exactement de deux éléments obtenus à partir des étapes de la base et de l'induction. Cette étape est habituellement assumée plutôt qu'explicitement énoncée

L'étape de fermeture est une partie très importante de la définition. Sans elle, il pourrait y avoir un bon nombre d'ensembles satisfaisant les deux premières étapes d'une définition inductive.

Exemple 3

Le nombre naturel **N** peut être défini comme un ensemble inductive. L'ensemble des nombres naturels N = {1, 2, 3…} est un ensemble inductif. Son élément de base est 0, et nous pouvons construire un nouvel élément à partir d'un élément existant en ajoutant le chiffre 1. Ainsi nous pouvons écrire une définition inductive pour N de la manière suivante.

Base: $1 \in \mathbf{N}$.

Induction: If $n \in \mathbf{N}$, alors $n + 1 \in \mathbf{N}$.

Les constructeurs de N sont le nombre entier 1 et l'opération qui additionne 1 à un élément de N. L'opération d'additionneur 1 à n s'appelle la fonction de successeur, que nous écrivons comme suit :

$$\mathrm{succ}(n) = n + 1.$$

En utilisant la fonction de successeur, nous pouvons récrire l'étape d'induction dans la définition ci-dessus de N sous la forme alternative suivante :

$$\text{Si } n \in \mathbf{N}, \text{ alors } \mathrm{succ}(n) \in \mathbf{N}.$$

Ainsi nous pouvons dire que N est un ensemble inductif avec deux constructeurs, 1 et succ.

Example 4

Des nombres impairs familiers: A = {1, 3, 7, 15, 31, …}, peuvent etre defines comme un ensemble inductif.

Une définition inductive de A peut être écrite sous la forme suivante:

Base: $1 \in A$.

Induction: Si $x \in A$, alors $2x + 1 \in A$.

Exemple 5

Des nombres de Fibonacci peuvent être définis comme ensemble inductif, périodiquement, comme suit :

$$\mathrm{fib}(0) = 0,$$
$$\mathrm{fib}(1) = 1,$$
$$\mathrm{fib}(n) = \mathrm{fib}(n-2) + \mathrm{fib}(n-1) \quad \text{Si } n > 1.$$

Le raisonnement inductif

Le principe de l'induction mathématique

Soit P(n) être une déclaration impliquant des nombres normaux. Pour montrer que P(n) est vrai pour tous les nombres entiers $n \geq m$ (pour $m \in \mathbf{Z}$), accomplit les deux (2) étapes suivantes :

1. Prouve que P(m) est vrai.
2. Supposons que P(k) soit vrai pour un arbitraire $k \geq m$. Puis prouve que P(k + 1) est vrai.

Le principe de l'induction mathématique est une technique pour montrer qu'infiniment beaucoup de déclarations sont vraies dans juste deux étapes. Pour gagner du temps, prenons un exemple. Cette technique de preuve est au juste ce dont on a besoin pour prouver des exemples comme le suivant.

Example 6

Prouve par induction mathématique soit P(n): $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

Solution

Soit P(n): $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$
Nous devons d'abord accomplir l'étape de base ; c'est-à-dire, nous devons montrer que P(1) est vrai. Puis nous devons effectuer l'étape inductive ; c'est-à-dire, montrer que le P(k + 1) est vrai quand on assume que P(k) est vrai.

Étape de base: P(1): $1 = 1^2 = 1$; donc, P(1) est vrai.

L'étape inductive: Pour accomplir l'étape inductive nous devons prouver que la proposition $P(k) \rightarrow P(k + 1)$ est vrai pour chaque nombre entier positif k. Pour ce faire, assume que P(k) : $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$ est vrai pour un nombre entier positif k ;
Maintenant on doit montrer que P(k + 1) est vrai, en assumant que P(k) est vrai. Nous savons que P(k + 1) a cette expression $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$.

Assumons que P(k) est vrai, il découle que :

$$\begin{aligned} P(k+1): 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) &= k^2 + (2k + 1) \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k + 1)(k + 1) \\ &= (k + 1)^2. \end{aligned}$$

Ceci montre que P(k + 1) dérive de P(k). Ce qui conclut notre preuve par induction mathématique.

Nous employons maintenant le principe de l'induction mathématique pour prouver une inégalité.

Le raisonnement inductif

Example 7

Utilise l'induction mathématique pour prouver l'inégalité ci-après.

$$n < 2^n$$

pour tous les entiers positives.

Solution

Soit P(n) la proposition "$n < 2^n$."

Étape de base: P(1) est vraie, puisque $1 < 2^1 = 2$.

L'étape inductive: Assumons que P(k) soit vrai pour l'entier positif k. C'est-à-dire assume que $k < 2^k$. On doit montrer que P(k + 1) est vrai. Nous devons faire en sorte que, $k + 1 < 2^{k+1}$. En ajoutant 1 des deux cotés de $k < 2^k$, et puis rien que $1 \leq 2^k$, donne :

$$k + 1 < 2^k + 1 \leq 2^k + 2^k = 2^{k+1}.$$

Nous avons prouvé que P(k + 1) est vrai, à savoir, que $k + 1< 2^{k+1}$, fondé sur l'hypothèse que P(k) est vrai. L'étape d'induction est complète.

Par conséquent, par le principe de l'induction mathématique, on a montré que $n < 2^n$ est vrai pour les entiers positifs *n*.

Le raisonnement inductif

Activités 1

* Définis chacun des ensembles suivants inductivement.

1. $S1 = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$
2. $S2 = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$
3. $S3 = \{-3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}$
4. $S4 = \{\ldots, -7, -4, -1, 2, 5, 8 , \ldots\}$
5. $S5 = \{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$
6. $S6 = \{1, 3, 7, 15, 31, 63, \ldots.\}$
7. $S7 = A \cup B = \{2, 4, 8, 16, \ldots\} \cup \{3, 7, 11, 15, \ldots\}$
8. Construis périodiquement $f(n) = \{0, 1, \ldots, n)$
9. Construis périodiquement $f(n) = \{0, 4, 8, 16, \ldots, n\}$

Soit $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(n) = (n – 2) + (n – 1)$ pour $n > 1$

10. Cite $f(1)$, $f(2)$, …, $f(12)$

Le raisonnement inductif

Activités 2

1. Définis l’ensemble $S = \{4, 7, 10, 13, \ldots\} \cup \{6, 9, 12, \ldots\}$ inductivement. Note que $S = S \cup S$ qui veut dire que deux ensembles sont définis inductivement : S and S

2. Construis périodiquement $f(n, k) = \{0, k, 2k, 3k, \ldots, nk\}$

3. Construis périodiquement $f(n, k) = \{n, n + 1, n + 2, \ldots, n + k\}$

4. Prouve par induction mathématique que

   $P(n)$: $2 + 6 + 10 + \ldots + (4n - 2) = 2n^2$

5. Montre que $n! < n^n$ for $n > 1$

   (Utilise le principe de l’induction mathématique.)

6. \- 10.

   Crée cinq (5) problèmes que tu souhaiterais résoudre impliquant des ensembles inductifs ou des preuves par le principe de l’induction mathématique

A Project for the Government of Senegal – Funded by USAir's African Education Initiative (AEI) Textbooks and Learning Materials Program (TLMP)

RFA (TLMP): M/OAA/GRO-05-1592
CA Reference: RLA-A-00-05-00084-00